2020年度 武蔵野美術大学 造形学部 一般選抜 一般方式
数学 建築学科（90分）

問題 I 次の 4 問から 2 問を選んで解答しなさい。

(1) 10 円硬貨 4 枚，100 円硬貨 8 枚，500 円硬貨 1 枚の一部または全部を用いて支払うことができる硬貨の組み合せは何通りあるか，また支払うことができる金額は何通りあるかをそれぞれ求めなさい。

(2) 12^{60} の桁数，最高位の数字，また，一の位の数字を求めなさい。
ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(3) 関数 $f(x) = 5\cos^2 x + 6\sin x\cos x - 3\sin^2 x$ を $\sin 2x$，$\cos 2x$ で表し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ における最大値および最小値をそれぞれ求めなさい。

(4) $|x-3| \leqq 7$ の解を求めなさい。また，a を正の定数とするとき，$|x-3| \leqq 7$，$|2x-5| > a$ を同時に満たす整数 x の個数がちょうど 5 個であるような a のとり得る値の範囲を求めなさい。

問題 II $a! + b! = 2^c$ と $a \leqq b$ を同時に満たす自然数 a，b，c について，次の各問に答えなさい。

(1) $a = 1$ のとき，自然数の組 (b, c) を求めなさい。

(2) $a = 2$ のとき，自然数の組 (b, c) をすべて求めなさい。

問題 III 次の各図形の面積の最大値を求めなさい。

(1) 半径が1の半円に内接する長方形。ただし，長方形の1つの辺は半円の直径上にあるものとする。

(2) 周囲の長さが1のおうぎ形。

問題 IV AB = AC = AD = 5，BC = CD = DB = 6 である四面体 ABCD があり，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を E とする。次の各問に答えなさい。

(1) 線分 DE と線分 AE の長さを求めなさい。

(2) △ADE の面積を求めなさい。

(3) 点 C から平面 ADE に下ろした垂線の長さを求めなさい。

問題 V O を原点とする座標平面上に $x > 0$，$y \leqq x^2(3 - x)$，$y \geqq -x + 3$ を満たす領域 D がある。次の各問に答えなさい。

(1) 領域 D を解答用紙に図示しなさい。

(2) 領域 D の面積 S を求めなさい。

(3) 点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，$z = x^2 + y^2$ の最小値と，そのときの (x, y) を求めなさい。

(4) 点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，$w = x^2 + y$ の最大値と，そのときの (x, y) を求めなさい。

2020年度 武蔵野美術大学 造形学部 一般選抜 一般方式
数学 建築学科 解答例

問題Ⅰ

(1)

10円硬貨4枚，100円硬貨8枚，500円硬貨1枚のとき

10円硬貨の出し方は0～4枚の5通り，100円硬貨の出し方は0～8枚の9通り，500円硬貨の出し方は0～1枚の2通りで，出し方は5×9×2＝90通りであるが，すべて0枚の場合は除くので89通り。

500円硬貨で支払えるときは500円硬貨を用い，500円硬貨1枚では足りないときに100円硬貨を5枚以上用いるものとする。

500円硬貨1枚で足りるとき，100円硬貨の使用枚数は0～4枚であるから，0枚の場合も含めて出し方は5×5×2＝50通りであるが，すべて0枚の場合は除くので49通り。

500円硬貨1枚で足りないとき，500円硬貨の使用枚数は1枚，100円硬貨の使用枚数は5～8枚であるから，5×4×1＝20通り。以上より，49＋20＝69通り。

(2)

$\log_{10}12^{60}=60(2\log_{10}2+\log_{10}3)=64.746$ より，$12^{60}=10^{64.746}=10^{0.746}\times10^{64}$

$\log_{10}5=1-\log_{10}2=0.6990$，$\log_{10}6=\log_{10}2+\log_{10}3=0.7781$ であるから，

$5\times10^{64}<12^{60}<6\times10^{64}$ よって，桁数は65桁，最高位の数は5

また，$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$ であるから，12^n の1の位の数は2，4，8，6が周期的に繰り返す。$60\div4=15\cdots0$ であるから，一の位の数は6

(3)

$f(x)=5\cdot\dfrac{1+\cos2x}{2}+6\cdot\dfrac{\sin2x}{2}-3\cdot\dfrac{1-\cos2x}{2}=\underline{3\sin2x+4\cos2x+1}$

$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ をみたす鋭角αを用いて，$f(x)=5\sin(2x+\alpha)+1$ と表せる。

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より，$\alpha\leqq2x+\alpha\leqq\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ であり，$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\dfrac{3\pi}{4}<\alpha+\dfrac{\pi}{2}<\pi$ である。

よって，$2x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値$\underline{6}$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $5\cos\alpha+1=\underline{4}$

(4)

$|x-3|\leqq7\iff-7\leqq x-3\leqq7\iff\underline{-4\leqq x\leqq10}$

$|2x-5|>\alpha\iff x<\dfrac{5-\alpha}{2},\ \dfrac{5+\alpha}{2}<x$

条件を満たす整数xの値は，$x=-4，-3，8，9，10$ となるので，

$-3<\dfrac{5-\alpha}{2}\leqq-2$ かつ $7\leqq\dfrac{5+\alpha}{2}<8$ となればよい。

これを満たすαのとり得る値の範囲は，$\underline{9\leqq\alpha<11}$

2020年度 武蔵野美術大学 造形学部 一般選抜 一般方式
数学 建築学科 解答例

問題Ⅱ

(1)

$a=1$ のとき，$a!$ は奇数，2^c は偶数なので，$b!$ は奇数である。

$b!$ が奇数となるのは，$b=1$ のときのみ。$\therefore c=1$　よって，$\underline{(b,\ c)=(1,\ 1)}$

(2)

$a=2$ のとき，$2!+b!=2^c$ となるので，

(あ) $b=2$ のとき，$c=2$

(い) $b=3$ のとき，$c=3$

(う) $b \geqq 4$ のとき，与式は $1+\dfrac{b!}{2}=2^{c-1}$ と変形でき，左辺は奇数，右辺は $c \geqq 4$ より偶数なので不適。

よって，$\underline{(b,\ c)=(2,\ 2),\ (3,\ 3)}$

問題Ⅲ

(1)

長方形の直径上にある辺の長さを $2x$，その辺に垂直な辺の長さを y，面積を S とすると，

$S=2xy$，$x^2+y^2=1$ が成り立つ。

$S^2=4x^2y^2=4x^2(1-x^2)=-4\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$ となるので

$x^2=\dfrac{1}{2}$ つまり $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で，S^2 は最大値 1 をとる。

よって，S の最大値は $\underline{1}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ である。

(2)

周辺の長さが 1 のおうぎ形の半径を r，中心角を θ [度]，面積を T とおくと，

$2r+\dfrac{2\pi r\theta}{360}=1$ より，$\dfrac{r\theta}{360}=\dfrac{1}{2\pi}(1-2r)$ であるので，

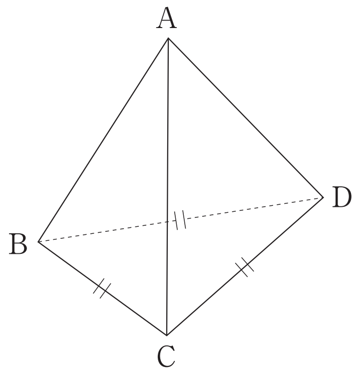
$T=\dfrac{\pi r^2\theta}{360}=\pi r\cdot\dfrac{1}{2\pi}(1-2r)=\dfrac{-r(2r-1)}{2}$

$T=-r^2+\dfrac{1}{2}r=-\left(r-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{16}$

よって，$r=\dfrac{1}{4}$ で T の最大値は $\underline{\dfrac{1}{16}}$ である。

2020年度 武蔵野美術大学 造形学部 一般選抜 一般方式
数学 建築学科 解答例

問題Ⅳ



(1)

余弦定理より，$DE^2=6^2+2^2-2\cdot6\cdot2\cdot\cos60^\circ=28$,

$AE^2=5^2+2^2-2\cdot5\cdot2\cdot\cos\angle ABE=25+4-20\cdot\dfrac{3}{5}=17$

$\therefore$ $DE=\underline{2\sqrt{7}}$，$AE=\underline{\sqrt{17}}$

(2)

余弦定理より，$\cos\angle AED=\dfrac{(2\sqrt{7})^2+(\sqrt{17})^2-5^2}{2\cdot2\sqrt{7}\cdot\sqrt{17}}=\dfrac{5}{\sqrt{119}}$

$\therefore$ $\sin\angle AED=\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{\sqrt{119}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{94}}{\sqrt{119}}$

よって，三角形ADE$=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{7}\cdot\sqrt{17}\cdot\dfrac{\sqrt{94}}{\sqrt{119}}=\underline{\sqrt{94}}$

(3)

求める垂線の長さをh，四面体ABCDの体積をVとすると，

$$h=\frac{\dfrac{2}{3}V}{\dfrac{1}{3}\triangle ADE}=\frac{\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot6^2\cdot\sin60^\circ\cdot\sqrt{5^2-(2\sqrt{3})^2}}{\dfrac{1}{3}\sqrt{94}}=\underline{\frac{3\sqrt{3666}}{47}}$$

2020年度 武蔵野美術大学 造形学部 一般選抜 一般方式
数学 建築学科 解答例

問題V

(1)

$y = x^2(3-x) = x^3 + 3x^2$ ……①

$y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$

よって，増減表は以下の通り。

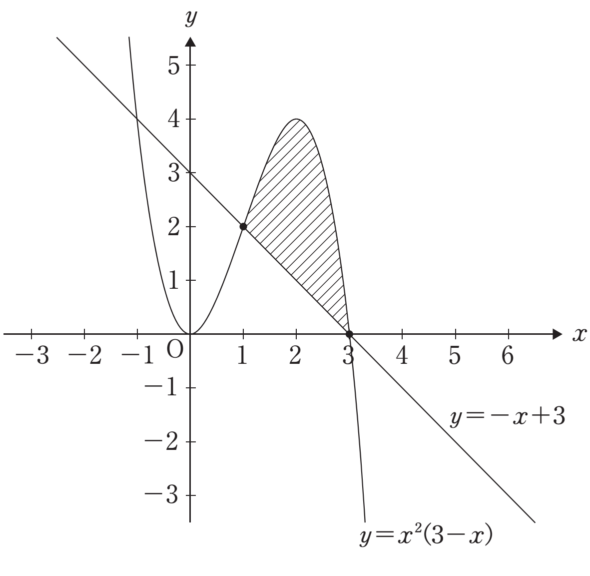
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	4	↘

$y = -x + 3$ ……②

①，②を連立して交点の座標を求める。

$x^2(3-x) = -x+3 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1,\ 1,\ 3$

領域Dを図示すると，図の斜線部(境界を含む)。



(2)

$$S = \int_1^3 \{x^2(3-x) - (-x+3)\}\,dx = \int_1^3 (-x^3 + 3x^2 + x - 3)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^3$$

$$= -\frac{1}{4}(3^4 - 1^4) + (3^3 - 1^3) + \frac{1}{2}(3^2 - 1^2) - 3(3-1) = -20 + 26 + 4 - 6 = \underline{4}$$

(3)

zは$(x,\ y)$と原点の距離を表している。

$(x,\ y)$が原点から$y = -x + 3$に下ろした垂線の足のとき，zが最小になる。

$(x,\ y) = \underline{\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)}$のとき，$z$の最小値は$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \underline{\frac{9}{2}}$である。

(4)

領域 D と曲線 $y=-x^2+w$ とが共有点をもつときの w の最大値を求めればよい。

2 曲線 $y=-x^2+w$ と $y=x^2(3-x)$ が共有点をもつ

$\Leftrightarrow$ $-x^2+w=x^2(3-x)$ が実数解をもつ

$\Leftrightarrow$ $-x^3+4x^2=w$ が実数解をもつ

ここで，$f(x)=-x^3+4x^2$ とおくと，$f'(x)=-3x^2+8x$ により，$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\ \dfrac{8}{3}$

$1 \leqq x \leqq 3$ より，$f(x)$ は，$x=\dfrac{8}{3}$ で極大値 $f\left(\dfrac{8}{3}\right)$ をもつ。

$y=w$ が $y=f(x)$ の極大点 $\left(\dfrac{8}{3},\ f\left(\dfrac{8}{3}\right)\right)$ を通るとき，領域 D と曲線 $y=-x^2+w$ が共有点をもち，

かつ，w は最大値をとる。

以上より，$(x,\ y)=\underline{\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{64}{27}\right)}$ のとき，w は最大値 $\left(\dfrac{8}{3}\right)^2+\dfrac{64}{27}=\underline{\dfrac{256}{27}}$ をとる。