2020年度 武蔵野美術大学 造形構想学部 総合型選抜［後期］数学力重視方式
数学 クリエイティブイノベーション学科・映像学科（180分）

以下の問題を解きなさい。結果だけではなく，途中のプロセスも答えること。

問題 1　n は 3 以上の自然数とする。また，自然数 r は $1 \leqq r \leqq n-1$ を満たしているものとする。

(1) 二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ について，${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r}$ が成り立つことを示しなさい。

(2) ${}_n\mathrm{C}_r$ を n，r と ${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ で表しなさい。

(3) ${}_8\mathrm{C}_2$，${}_{11}\mathrm{C}_3$ および ${}_{17}\mathrm{C}_{15}$ を求めなさい。

(4) $n=p$ が 3 以上の素数のとき，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数となることを示しなさい。

問題 2

(1) 正四面体の各面を異なる 4 色すべてを用いて塗分ける方法は何通りあるか。
ただし，回転して同じ配色になるものは 1 通りと数える。(2) (3) も同様。

(2) 正六面体の各面を異なる 6 色すべてを用いて塗分ける方法は何通りあるか。

(3) 正八面体の各面を異なる 8 色すべてを用いて塗分ける方法は何通りあるか。

問題 3 a, bは実数とする。

$f(x)=x^3+x^2-3x+3$

$g(x)=x^2+ax+b$

とする。xy平面において，曲線C_1：$y=f(x)$と曲線C_2：$y=g(x)$が点(1，2)で共通接線lを持つとする。

(1) lの方程式を求めなさい。

(2) a, bの値を求めなさい。

(3) $f(x)<g(x)$を満たすxの範囲を求めなさい。

(4) 一般に，m，nをある定数として

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2 dx = m(\beta-\alpha)^n$$

となることが知られている。$\beta>\alpha$として，この公式が成り立つことを計算で導き，m，nの値とともに示しなさい。

(5) 曲線C_1とlで囲まれた図形の面積をS_1，曲線C_1とC_2で囲まれた図形の面積をS_2とする。S_1-S_2を求めなさい。必要なら，(4)で求めた公式を使ってよい。

問題 4 $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$, $g(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$とする。

(1) $(f(x))^2-(f'(x))^2$ の値を求めなさい。

(2) 2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と y 軸および直線 $x=a$ によって囲まれる領域を R とする。R の面積 S_a を a で表しなさい。

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} S_a$ を求めなさい。

(4) 領域Rをx軸の周りに回転してできる立体の体積をV_aとする。$a=1$ のときの体積 V_1 を求めなさい。

(5) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V_a}{a}$ を求めなさい。

問題 5　半径1の円に，正三角形ABCが内接している。ABの弧でCを含まない側を点Pが動く。ただし、PはA，Bには一致しない。$\angle \mathrm{PBA} = \theta$とする。

(1) PA，PBをθで表しなさい。

(2) $\mathrm{PC} = \mathrm{PA} + \mathrm{PB}$を示しなさい。

(3) $\mathrm{PA}^2 + \mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$の値を求めなさい。

(4) $\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}}$を$\tan\theta$で表しなさい。

(5) $\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} = 1$となるとき，$\theta$の値を求めなさい。また，この時の四角形PBCAの面積を求めなさい。

(6) (5)のときの概形を，定規とコンパスを使って図に示しなさい。ただし，円の半径は4cmとし，ABを水平方向にとり，P，A，B，Cおよび，円の中心Oを書き入れなさい。辺の長さや角度などの数値は記入する必要はない。

2020年度 武蔵野美術大学 造形構想学部 総合型選抜［後期］数学力重視方式 数学 クリエイティブイノベーション学科･映像学科 解答例

問題１（組み合わせ，論理，整数問題）

(1)

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\ \text{であるから，右辺}=\frac{n!}{(n-(n-r)!\,(n-r)!)}=\text{左辺}$$

【別解】

左辺は n 個の中から r 個を選ぶ（$n-r$ 個残す）組み合わせ。右辺は n 個の中から $n-r$ 個を選ぶ（r 個残す）組み合わせで等しい。

(2)

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=\frac{n\cdot(n-r)!}{(n-r)(n-r-1)!\,r!}=\underline{\frac{n}{(n-r)}\,{}_{n-1}\mathrm{C}_r}$$

(3)

${}_8\mathrm{C}_2=\underline{28}$，${}_{11}\mathrm{C}_3=\underline{165}$，${}_{17}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_2=\underline{136}$

(4)

${}_p\mathrm{C}_r=p\cdot\dfrac{(p-1)\ldots(p-r+1)}{r!}$（$*$）．$p$ は素数であり，$1\leqq r\leqq p-1$ であるから，分母の $r!$ のどの因数とも互いに素である。${}_p\mathrm{C}_r$ が整数であることは明らか。従って，（$*$）の分数部分は割り切れて整数となり，p の倍数となる。

問題２（組み合わせ。数え上げの問題）

(1)

回転を考慮し，任意の面を底面として固定する。残り３色の円順列となり，$\underline{(3-1)!=2\text{通り。}}$

(2)

底面を固定し，それに向かい合う面の色を決める。５通り。側面は，残り４色の円順列となり，$(4-1)!=6$ 通り。$\underline{5\times6=30\text{通り。}}$

(3)

８つの面の各重心を考えると，正６面体の８つの頂点に対応する。この８つの点に割り振る色として考える。

ある頂点を決め，その立体対角線上にある頂点の色を決める。７通り。

残り６つの頂点のうち，最初の頂点に近い３点の配色は６色のうちから３色を選んで並べる円順列で ${}_6\mathrm{C}_3\times(3-1)!=40$ 通り。

残り３つの頂点は，先に決めた３色の間に並べる順列となり，$3!=6$ 通り。

$\underline{7\times40\times6=1680\text{通り。}}$

2020年度 武蔵野美術大学 造形構想学部 総合型選抜［後期］数学力重視方式
数学 クリエイティブイノベーション学科・映像学科 解答例

問題３（数Ⅱ，積分，標準的問題）

(1)

$f'(x)=3x^2+2x-3$，$g'(x)=2x+a$．(1，2)で共通接線を持つから，$f'(1)=2$．

lは傾き2(1，2)を通る．$\underline{y=2x}$

(2)

$g(1)=1+a+b=2$．$g'(1)=2+a=2$．$\therefore\ \underline{a=0}$

$g(x)=x^2+b$．$g(1)=b+1=2$．$\therefore\ \underline{b=1}$．

(3)

$g(x)=x^2+1$．$f-g=x^3+x^2-3x+3-(x^2+1)=(x-1)^2(x+2)$．$\therefore\ \underline{x<-2}$

(4)

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\int_\alpha^\beta (x-\beta+\beta-\alpha)(x-\beta)^2dx=\int_\alpha^\beta ((x-\beta)^3-(\alpha-\beta)(x-\beta)^2)dx$$

$$=\frac{1}{4}\Big[(x-\beta)^4\Big]_\alpha^\beta-\frac{1}{3}(\alpha-\beta)\Big[(x-\beta)^3\Big]_\alpha^\beta=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(\beta-\alpha)^4=\underline{\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4}$$

(5)

fとlの交点のx座標は，$x^3+x^2-5x+3=(x-1)(x+3)^2=0$．$\therefore 1，-3$

$$S_1=\int_{-3}^1 (x+3)(x-1)^2dx=\frac{1}{12}(1-(-3))=\frac{4^4}{12}$$

$$S_2=\int_{-2}^1 (x+2)(x-1)^2dx=\frac{1}{12}(1-(-2))=\frac{3^4}{12}$$

$$S_1-S_2=\frac{4^4-3^4}{12}=\frac{175}{12}$$

問題4（数III，曲線に囲まれた面積。典型問題）

(1)

$$f'(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) \quad \therefore (f(x))^2-(f'(x))^2=\underline{1}$$

(2)

$$f(x)-g(x)=e^{-x}>0\,(x>0)$$

$$S_a=\int_0^a(f-g)\,dx=\int_0^a e^{-x}\,dx=\underline{1-e^{-a}}$$

(3)

$$\lim_{a\to\infty}S_a=\underline{1}$$

(4)

$$V_1=\pi\int_0^1(f(x))^2-\pi\int_0^1(g(x))^2dx$$

第1項 V_{f1}，第2項 V_{g1} とする。

$$(f(x))^2=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x}).\quad V_{f1}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[(e^{2x}-e^{-2x}+4x)\right]_0^1=\frac{\pi}{8}(e^2-e^{-2}+4).$$

同様に $V_{g1}=\dfrac{\pi}{8}(e^2+e^{-2}-4)$.

$$\therefore\ V_1=V_{f1}-V_{g1}=\underline{\frac{\pi}{4}(4-e^{-2})}$$

(5)

(4)と同様に計算すると $V_a=\ldots=\dfrac{\pi}{4}(4a-e^{-2a})$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{V_a}{a}=\frac{\pi}{4}\left(4-\frac{e^{-2a}}{a}\right)=\underline{\pi}$$

2020年度 武蔵野美術大学 造形構想学部 総合型選抜［後期］ 数学力重視方式
数学 クリエイティブイノベーション学科・映像学科 解答例

問題５（三角関数。比較的易。正弦定理，加法定理）

(1)

正弦定理より，$\mathrm{PA}=\underline{2\sin\theta}$，$\mathrm{PB}=2\sin(60-\theta)=\underline{\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta}$.

(2)

$\mathrm{PC}=2\sin(120-\theta)=\ldots=\underline{\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta.\ \ \therefore\ \mathrm{PC}=\mathrm{PA}+\mathrm{PB}}$

(3)

$4\sin^2\theta+(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)^2+(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)^2=4\sin^2\theta+2(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\underline{6}$

(4)

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}}=\frac{\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta}{2\sin\theta}=\underline{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan\theta}-1\right)}$$

(5)

$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad\therefore$ $\underline{\theta=30^\circ\left(=\dfrac{\pi}{6}\right)}$ $\quad\triangle\mathrm{PBA}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. $\mathrm{PBCA}=\underline{\sqrt{3}}$

(6)

図省略。△PBA は，△OAB などと合わせて４つの合同な二等辺三角形となる。