問題 I 次の 4 問から 2 問を選んで解答しなさい。

(1) AB = 2，BC = 3，CA = $\sqrt{19}$ である△ABC の最大角とその大きさを求めなさい。

(2) A, B の 2 部屋に 6 人を入れる方法は全部で何通りあるか答えなさい。ただし，空き部屋はないものとする。

(3) $\sqrt{5}$ の小数部分を x とするとき，$x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ の値を求めなさい。

(4) 正十二面体は各面が互いに合同な正五角形の多面体である。正十二面体の辺の数と頂点の数をそれぞれ求めなさい。

問題 II　a，b を定数とする。2 次関数 $y = x^2 + 4ax - b$ のグラフ C が点（$1, 4$）を通るとき，次の各問に答えなさい。

(1)　b を a を用いて表しなさい。

(2)　C の頂点の y 座標が -5 であるとき，a，b の値をそれぞれ求めなさい。

(3)　C が常に x 軸より上側にあるとき，b の値の範囲を求めなさい。

問題 III　3辺の長さがすべて整数である直角三角形ABCにおいて，AB $= c$，BC $= a$，CA $= b$，$a < b < c$ とする。いま，△ABCの3辺の長さの和を l，面積を S とすると，$S = l$ が成り立っている。

このとき，次の各問に答えなさい。

(1)　$S = l$ であることから，c を a，b を用いて表しなさい。

(2)　a，b のうち少なくとも一方が偶数であることを証明しなさい。

(3)　△ABCの内接円の半径 r の値を求めなさい。

(4)　$ab - 4(a + b)$ の値を求めなさい。

(5)　条件をみたす a，b，c の組（a，b，c）をすべて求めなさい。

問題 IV　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。関数 $f(\theta) = 2\cos\theta - \sin 2\theta - 2\sin\theta - 2$ について，次の各問に答えなさい。

(1)　$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めなさい。

(2)　$t = \sin\theta - \cos\theta$ とおくとき，t の値の範囲を求めなさい。
また，$f(\theta)$ を t を用いて表しなさい。

(3)　$f(\theta)$ の最大値と最小値を求めなさい。また，そのときの θ の値を求めなさい。

(4)　θ に関する方程式 $f(\theta) = k$ の解の個数は定数 k の値によってどのように変わるか答えなさい。

問題 V 関数$f(x)=|x^2-6x+5|+x+2$について，次の各問に答えなさい。

(1) 曲線 $y=f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2) k を定数とする。直線 $y=x+k$ が曲線 $y=f(x)$ に接するとき，定数 k の値を求めなさい。

(3) 2点 $(1, f(1))$，$(5, f(5))$ を通る直線と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

(4) **(2)** で求めた直線と $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めなさい。

数学　解答例

問題 I

（1）図形と計量（数学 I ）

$2<3<\sqrt{19}$ より，最大辺が CA であるので最大角は $\angle\mathrm{ABC}$ 。

余弦定理より， $\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{19})^2}{2\cdot2\cdot3}=-\dfrac{1}{2}$　　∴最大角は $\angle\mathrm{ABC}=120°$

（2）場合の数（数学 A）

6 人それぞれ A，B の 2 通りの入れ方があり，このうち 6 人とも A，6 人とも B に入る入り方がそれぞれ 1 通り存在するので， $2^6-2=62$ （通り）

（3）実数（数学 I ）

$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}\ \Leftrightarrow\ 2<\sqrt{5}<3$ より， $x=\sqrt{5}-2$ 。

このとき， $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$ より， $x+\dfrac{1}{x}=2\sqrt{5}$

$$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}=(2\sqrt{5})^2-2=18$$

（4）空間図形の多面体定理と数え上げ（数学 A）

正十二面体の面の数は 12，辺の数は $5\cdot12\div2=30$ より，オイラーの多面体定理から頂点の数は $30-12+2=20$

【別解】1 つの頂点に集まる辺の数が 3 本であるので，

$5\cdot12\div3=20$ から頂点の数を求められます。

数学　解答例

問題Ⅱ　２次関数（数学Ⅰ）

（１）

$y = x^2 + 4ax - b$ が点 $(1, 4)$ を通るので，$4 = 1 + 4a - b \iff b = 4a - 3$

（２）

$y = x^2 + 4ax - b = (x + 2a)^2 - 4a^2 - 4a + 3$ より，$x = -2a$ のとき最小値 $-4a^2 - 4a + 3$

$-4a^2 - 4a + 3 = -5 \iff 4a^2 + 4a - 8 = 0 \iff 4(a + 2)(a - 1) = 0$ より，$a = -2$，1

$a = -2$ のとき，$b = 4 \cdot (-2) - 3 = -11$　　$a = 1$ のとき，$b = 4 \cdot 1 - 3 = 1$

$\therefore (a, b) = (-2, -11)$，$(1, 1)$

（３）

下に凸の放物線より，頂点の y 座標が正であればよい。

$-4a^2 - 4a + 3 > 0 \iff 4a^2 + 4a - 3 < 0 \iff (2a - 1)(2a + 3) < 0$ より，

$-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2} \iff -6 < 4a < 2 \iff -9 < 4a - 3 < -1$　　$\therefore -9 < b < -1$

数学　解答例

問題Ⅲ　集合（数学Ｉ）・図形の性質・整数の性質の融合問題（数学 A）

$l=a+b+c$　……①

$S=\frac{1}{2}ab$　……②

（1）

①，②より，$S=l \Leftrightarrow \frac{1}{2}ab=a+b+c \Leftrightarrow c=\frac{1}{2}ab-a-b$　……③

（2）

$S=l$ より $ab=2(a+b+c)$　ab は偶数なので，a，b のうち少なくとも一方が偶数である。

【別解】

a，b のいずれも奇数であると仮定する。m，n を整数として

$a=2m+1,\ b=2n+1$ （$0 \leqq m < n$）とすると

$c^2=a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+n^2+m+n)+2$

よって，「c^2 を 4 で割った余りは 2 になる」……（＊）

ここで，k を整数として

c が偶数のとき，$c=2k$ （$k \geqq 1$）とおくと，$c^2=4k^2$

c が奇数のとき，$c=2k+1$ （$k \geqq 0$）とおくと，$c^2=4(k^2+k)+1$

これは（＊）に矛盾する。

したがって，a，b のうち少なくとも一方が偶数である。

（3）

内接円の半径を r とすると，$S=\frac{1}{2}lr$

$r=\frac{S}{\frac{1}{2}l}=\frac{2S}{l}$　　$S=l$ より，$r=2$

（4）

△ABC が直角三角形であるから，$a^2+b^2=c^2$　……④

③を④に代入して，$a^2+b^2=\left(\frac{1}{2}ab-a-b\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}a^2b^2-ab(a+b)+2ab=0$

$ab>0$ より，$ab-4(a+b)+8=0$　よって，$ab-4(a+b)=-8$　……⑤

【別解】

△ABC が直角三角形であるから，$c=(a-2)+(b-2)=a+b-4$　……⑥

数学　解答例

③，⑥より，$\frac{1}{2}ab-a-b=a+b-4 \iff ab-4(a+b)=-8$　……⑤

（5）

⑤　$\iff$　$(a-4)(b-4)=8$

$0<a<b$ より，$-4<a-4<b-4$

$(a-4,\ b-4)=(1,\ 8),\ (2,\ 4)$

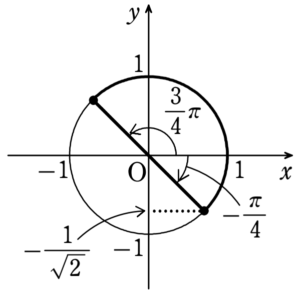
よって，$(a,\ b,\ c)=(5,\ 12,\ 13),\ (6,\ 8,\ 10)$

数学　解答例

問題Ⅳ　三角関数（数学Ⅱ）

（1）

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{3}-2=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2=-1-\frac{3}{2}\sqrt{3}$$



（2）

$t=\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ であり，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{3}{4}\pi$

$\therefore -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1 \iff -1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$　より　$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$

また，$t^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-\sin 2\theta$ より，$\sin 2\theta=1-t^2$

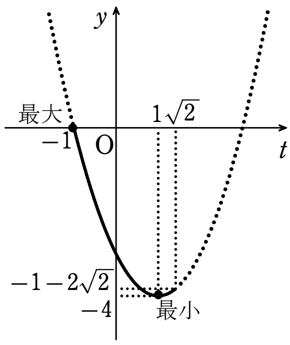
$\therefore f(\theta)=-2(\sin\theta-\cos\theta)-\sin 2\theta-2=-2t-(1-t^2)-2=t^2-2t-3$

（3）

$f(\theta)=t^2-2t-3=(t-1)^2-4$　であるので，

$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \iff \theta=0$ のとき，最大値 0

$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1 \iff \theta=\frac{\pi}{2}$，$\pi$ のとき，最小値 -4



（4）

$y=t^2-2t-3$ のグラフと $y=k$ のグラフの共有点を考える。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ において，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ を満たす θ は

$1\leqq t<\sqrt{2}$ のとき 2 個，

$t=\sqrt{2}$ または $-1\leqq t<1$ のとき 1 個　　存在することに注意すると，

方程式の実数解の個数は　$-4<k<-1-2\sqrt{2}$ のとき 3 個

$k=-4$，$-1-2\sqrt{2}$ のとき 2 個

$-1-2\sqrt{2}<k\leqq 0$ のとき 1 個

$k<-4$，$0<k$ のとき 0 個

数学　解答例

問題Ｖ　微分法・積分法（数学Ⅱ）

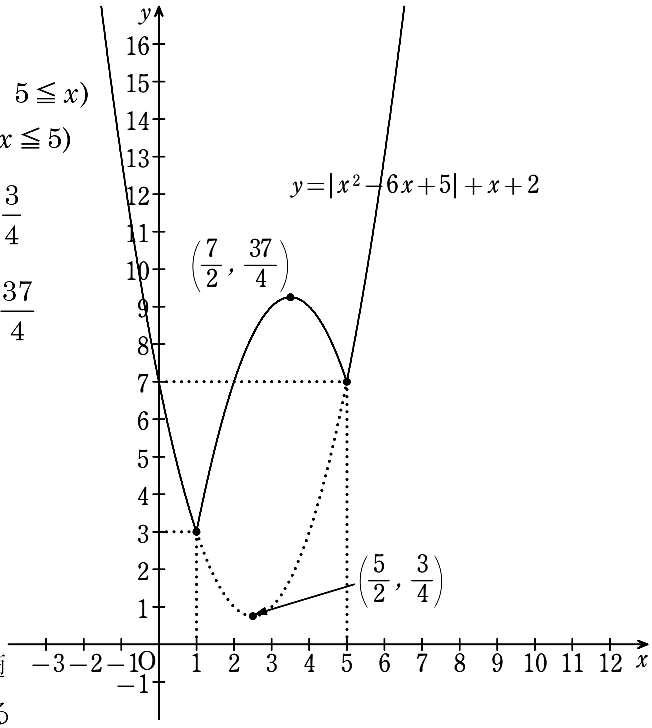
（１）

$$f(x)=|x^2-6x+5|+x+2=\begin{cases} x^2-5x+7 & (x\leqq 1,\ 5\leqq x) \\ -x^2+7x-3 & (1\leqq x\leqq 5) \end{cases}$$

ｉ）$x\leqq 1,\ 5\leqq x : f(x)=x^2-5x+7=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

ii）$1\leqq x\leqq 5 : f(x)=-x^2+7x-3=-\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{37}{4}$

よって，グラフは右図の通り



（２）

【解１】

ｉ）$x\leqq 1,\ 5\leqq x : f'(x)=2x-5=1\ \ x=3$　不適

ii）$1\leqq x\leqq 5 : f'(x)=-2x+7=1\ \ x=3$　適する

よって，$f'(x)=1 \iff x=3$　接点は$(3,\ 9)$となるので，$k=6$

【解２】

ｉ）$x\leqq 1,\ 5\leqq x : x^2-5x+7=x+k \iff x^2-6x+7-k=0$　……①

判別式をD_1とすると，$D_1/4=9-(7-k)=0 \iff k=-2$

このとき，①より$x=3$となり，不適

ii）$1\leqq x\leqq 5 : -x^2+7x-3=x+k \iff x^2-6x+k+3=0$　……②

判別式をD_2とすると，$D_2/4=9-(k+3)=0 \iff k=6$

このとき，②より$x=3$となり，適する

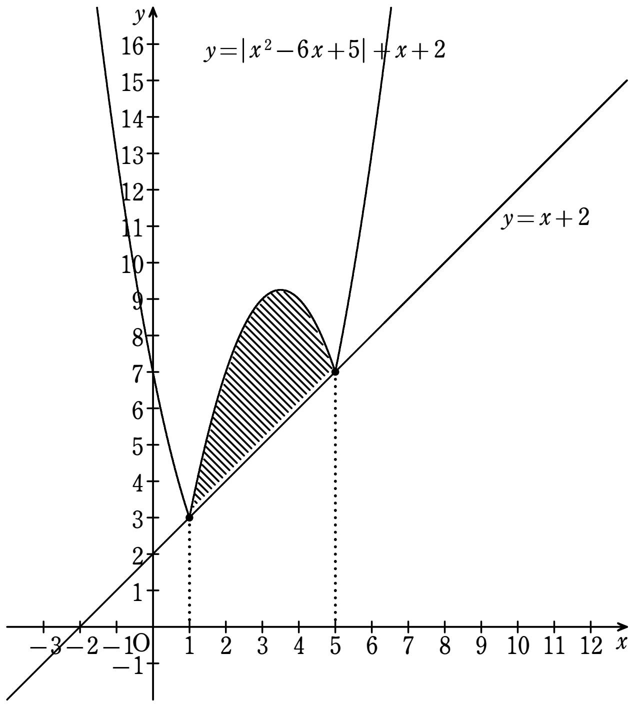
（３）15点

2点$(1,\ 3)$, $(5,\ 7)$を結ぶ直線の方程式は，

$y=x+2$　　求める面積は，右図の斜線部

求める面積をS_1とすると，

$$S_1=\int_1^5\{(-x^2+7x-3)-(x+2)\}dx$$
$$=\int_1^5(-x^2+6x-5)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2-5x\right]_1^5$$
$$=-\frac{1}{3}(5^3-1^3)+3(5^2-1^2)-5(5-1)$$
$$=-\frac{124}{3}+72-20=\frac{32}{3}$$



数学　解答例

【別解】

$$S_1=\int_1^5\{(-x^2+7x-3)-(x+2)\}dx$$
$$=\int_1^5(-x^2+6x-5)dx$$
$$=-\int_1^5(x-1)(x-5)dx$$
$$=\frac{1}{6}(5-1)^3=\frac{32}{3}$$

（４）

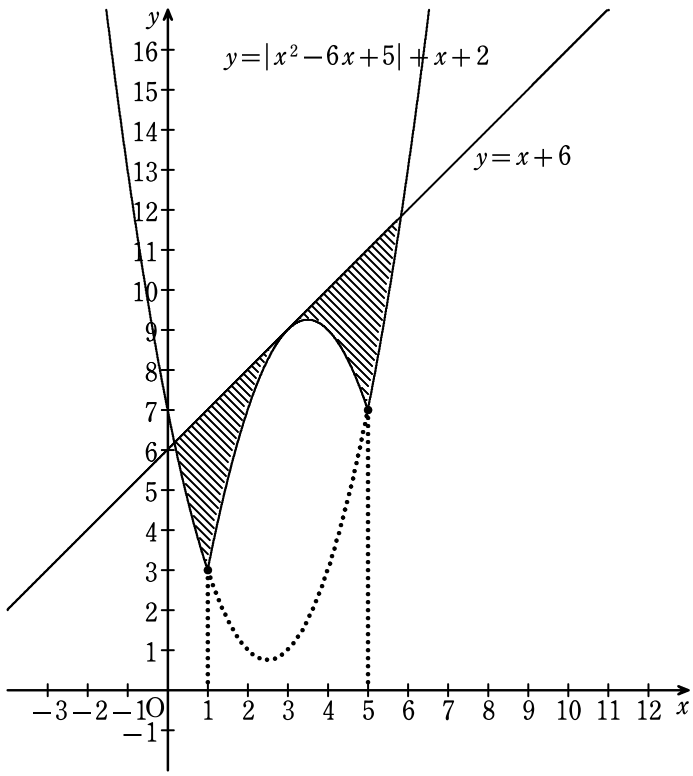
求める面積は，右図の斜線部

$y=x^2-5x+7$ と $y=x+6$ を連立して

$x^2-5x+7=x+6 \iff x^2-6x+1=0$

$\iff x=3\pm2\sqrt{2}$

$\alpha=3-2\sqrt{2}$，$\beta=3+2\sqrt{2}$ とする



右図で $y=-x^2+7x+3$ と $y=x^2-5x+7$ で囲まれる図形の面積を求めると

$$\int_1^5\{(-x^2+7x-3)-(x^2-5x+7)\}dx$$
$$=-2\int_1^5(x^2-6x+5)dx=\frac{64}{3}$$

よって，求める面積を S_2 とすると，

$$S_2=\int_\alpha^\beta\{(x+6)-(x^2-5x+7)\}dx-\frac{64}{3}$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx-\frac{64}{3}$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3-\frac{64}{3}=\frac{64}{3}(\sqrt{2}-1)$$