**問題 I** 次の 4 問から 2 問を選んで解答しなさい。

**(1)** AB $=2$，BC $=3$，CA $=\sqrt{19}$ である△ABC の最大角とその大きさを求めなさい。

**(2)** A，B の 2 部屋に 6 人を入れる方法は全部で何通りあるか答えなさい。ただし，空き部屋はないものとする。

**(3)** $\sqrt{5}$ の小数部分を $x$ とするとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値を求めなさい。

**(4)** 正十二面体は各面が互いに合同な正五角形の多面体である。正十二面体の辺の数と頂点の数をそれぞれ求めなさい。

**問題 II**　$a$，$b$ を定数とする。2 次関数 $y = x^2 + 4ax - b$ のグラフ $C$ が点 $(1, 4)$ を通るとき，次の各問に答えなさい。

(1)　$b$ を $a$ を用いて表しなさい。

(2)　$C$ の頂点の $y$ 座標が $-5$ であるとき，$a$，$b$ の値をそれぞれ求めなさい。

(3)　$C$ が常に $x$ 軸より上側にあるとき，$b$ の値の範囲を求めなさい。

**問題 III**　3辺の長さがすべて整数である直角三角形ABCにおいて，AB ＝ $c$，BC ＝ $a$，CA ＝ $b$，$a < b < c$ とする。いま，△ABCの3辺の長さの和を $l$，面積を $S$ とすると，$S = l$ が成り立っている。

このとき，次の各問に答えなさい。

(1)　$S = l$ であることから，$c$ を $a$，$b$ を用いて表しなさい。

(2)　$a$，$b$ のうち少なくとも一方が偶数であることを証明しなさい。

(3)　△ABCの内接円の半径 $r$ の値を求めなさい。

(4)　$ab - 4(a + b)$ の値を求めなさい。

(5)　条件をみたす $a$，$b$，$c$ の組（$a$，$b$，$c$）をすべて求めなさい。

数学　解答例

問題 I

（1）図形と計量（数学 I ）

$2<3<\sqrt{19}$ より，最大辺が CA であるので最大角は $\angle\mathrm{ABC}$。

余弦定理より， $\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{2^2+3^2-(\sqrt{19})^2}{2\cdot2\cdot3}=-\dfrac{1}{2}$　　$\therefore$最大角は $\angle\mathrm{ABC}=120°$

（2）場合の数（数学 A）

6 人それぞれ A，B の 2 通りの入れ方があり，このうち 6 人とも A，6 人とも B に入る入り方がそれぞれ 1 通り存在するので， $2^6-2=62$ （通り）

（3）実数（数学 I ）

$\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$ $\Leftrightarrow$ $2<\sqrt{5}<3$ より， $x=\sqrt{5}-2$。

このとき， $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$ より， $x+\dfrac{1}{x}=2\sqrt{5}$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}=(2\sqrt{5})^2-2=18$

（4）空間図形の多面体定理と数え上げ（数学 A）

正十二面体の面の数は 12，辺の数は $5\cdot12\div2=30$ より，オイラーの多面体定理から頂点の数は $30-12+2=20$

【別解】1 つの頂点に集まる辺の数が 3 本であるので，

$5\cdot12\div3=20$ から頂点の数を求められます。

# 数学　解答例

## 問題Ⅱ　2次関数（数学Ⅰ）

（1）

$y=x^2+4ax-b$ が点 $(1,4)$ を通るので，$4=1+4a-b \iff b=4a-3$

（2）

$y=x^2+4ax-b=(x+2a)^2-4a^2-4a+3$ より，$x=-2a$ のとき最小値 $-4a^2-4a+3$

$-4a^2-4a+3=-5 \iff 4a^2+4a-8=0 \iff 4(a+2)(a-1)=0$　より，$a=-2$，$1$

$a=-2$ のとき，$b=4\cdot(-2)-3=-11$　　$a=1$ のとき，$b=4\cdot 1-3=1$

$\therefore (a,b)=(-2,-11)$，$(1,1)$

（3）

下に凸の放物線より，頂点の $y$ 座標が正であればよい。

$-4a^2-4a+3>0 \iff 4a^2+4a-3<0 \iff (2a-1)(2a+3)<0$　より，

$-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{1}{2} \iff -6<4a<2 \iff -9<4a-3<-1$　　$\therefore -9<b<-1$

数学　解答例

問題Ⅲ　集合（数学Ⅰ）・図形の性質・整数の性質の融合問題（数学A）

$l=a+b+c$　……①

$S=\dfrac{1}{2}ab$　……②

（1）

①，②より，$S=l \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}ab=a+b+c \Leftrightarrow c=\dfrac{1}{2}ab-a-b$　……③

（2）

$S=l$ より $ab=2(a+b+c)$　$ab$ は偶数なので，$a$，$b$ のうち少なくとも一方が偶数である。

【別解】

$a$，$b$ のいずれも奇数であると仮定する。$m$，$n$ を整数として

$a=2m+1,\ b=2n+1$（$0 \leqq m < n$）とすると

$c^2=a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+n^2+m+n)+2$

よって，「$c^2$ を 4 で割った余りは 2 になる」……（＊）

ここで，$k$ を整数として

$c$ が偶数のとき，$c=2k$（$k \geqq 1$）とおくと，$c^2=4k^2$

$c$ が奇数のとき，$c=2k+1$（$k \geqq 0$）とおくと，$c^2=4(k^2+k)+1$

これは（＊）に矛盾する。

したがって，$a$，$b$ のうち少なくとも一方が偶数である。

（3）

内接円の半径を $r$ とすると，$S=\dfrac{1}{2}lr$

$r=\dfrac{S}{\frac{1}{2}l}=\dfrac{2S}{l}$　　$S=l$ より，$r=2$

（4）

$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形であるから，$a^2+b^2=c^2$　……④

③を④に代入して，$a^2+b^2=\left(\dfrac{1}{2}ab-a-b\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}a^2b^2-ab(a+b)+2ab=0$

$ab>0$ より，$ab-4(a+b)+8=0$　よって，$ab-4(a+b)=-8$　……⑤

【別解】

$\triangle\mathrm{ABC}$ が直角三角形であるから，$c=(a-2)+(b-2)=a+b-4$　……⑥

数学　解答例

③，⑥より，$\frac{1}{2}ab-a-b=a+b-4 \iff ab-4(a+b)=-8$　……⑤

（5）

⑤　$\iff$　$(a-4)(b-4)=8$

$0<a<b$ より，$-4<a-4<b-4$

$(a-4,\ b-4)=(1,\ 8),\ (2,\ 4)$

よって，$(a,\ b,\ c)=(5,\ 12,\ 13),\ (6,\ 8,\ 10)$