以下の問題を解きなさい。結果だけではなく，途中のプロセスも答えること。

$\boxed{1}$

正多面体は全部で 5 種類あり, 5 種類に限られることが知られている。これについて考察してみよう。

(1) 正多面体に関する以下の表を完成しなさい。結果は解答用紙に示すこと。

面の数	頂点の数	辺の数	1 つの頂点に集まる面の数	面の形
4			3	
				正方形
8				
12			3	
20	12		5	正三角形

(2) 正 n 角形の 1 つの内角の大きさを n の式で表しなさい。

(3) 正多面体の 1 つの頂点に注目すると, m 個の正 n 角形が重なりなく隙間なくその頂点のまわりに集まっている（ただし, $m \geqq 3$, $n \geqq 3$)。1 つの頂点のまわりに集まっている m 個の正 n 角形 の内角の和が 360° を超えないこと（つまり, 立体の角となること）を利用して, m, n が満たす不等式をたてなさい。また, その不等式を $m < f(n)$ の形に整理しなさい（$f(n)$ は n の式)。

(4) (3) の不等式を満たす m を求めなさい。

(5) (3) の不等式を満たす m と n の組み (m, n) をすべて求めなさい。

(6)(5) の結果と (1) の表との対応について考察したことを, 簡潔に述べなさい（40 文字以内程度)。

$\boxed{2}$

座標平面上に点 $\mathrm{A}(1, 7)$ がある。また, 直線 $y = 2x$ を l とする。

(1)y 軸に関して点 A に対称な点 B の座標, および, 直線 l に関して点 A に対称な点 C の座標を求めなさい。

(2) 点 P は y 軸上を動き, 点 Q は直線 l 上を動くものとする。AP+PQ+QA の長さが最小となるときの P と Q の座標を求めなさい。

(3)(2) のときの点 A, B, C, P, Q や直線 l の様子を, 解答用紙に図示しなさい（単位を cm とする)。

$\boxed{3}$

座標平面上に曲線 C: $y = x^3 - x^2$ がある。

(1) 点 A(0, 3) を通る直線で C に接するものはただ 1 つであることを示しなさい。

(2)(1) の直線を l とする。l と C で囲まれる部分の面積を求めなさい。

$\boxed{4}$

(1) $y = 1 - \sin x - \cos x$ のグラフの概形を $-2\pi \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で解答用紙に描きなさい。

(2) 方程式

$$e^x(1 - \sin x) = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を考える (x は実数)。$f(x) = e^x(1 - \sin x) - 1$ とおいたとき, $y = f(x)$ が極大となる x をすべて求めなさい。

(3) 方程式 ① を満たす解は $x \geqq 0$ の範囲で無数にあることを示しなさい。

(4) 方程式 ① を満たす解は $x < 0$ の範囲にはないことを示しなさい。

$\boxed{5}$

一辺の長さが 1 の正六角形がある。頂点を $H_k (1 \leqq k \leqq 6, k$ は整数$)$ とする。以下の問いに答えなさい。

(1)3 つの頂点を結んでできる三角形のうち, 正三角形となるのは何通りありますか。

(2)3 つの頂点を結んでできる三角形のうち, 直角三角形となるのは何通りありますか。

次にサイコロを振って, k の目がでた場合は, 頂点 H_k を選ぶものとする。

(3) サイコロを 3 回振って選ばれた点を結んでできる図形が二等辺三角形となる確率を求めなさい。ただし正三角形となる場合は除く。

(4) サイコロを 3 回振って選ばれた点を結んでできる図形の面積の最大値を求めなさい。

略解（途中の計算やグラフなどは省略しています。答案では途中計算や数学的な論理展開が必要です。）

$\boxed{1}$

(1) （左から右順に）4, 6, 正三角形 / 6, 8, 12, 3/ 6, 12, 4, 正三角形/ 20, 30, 正五角形/ 30

(2) $180^\circ(n-2)/n$

(3) $180^\circ(n-2)/n \times m < 360^\circ \therefore m < 2n/(n-2) (\because n \geqq 3)$

(4)$m < 2 + 4/(n-2) \leqq 6$ したがって $3 \leqq m \leqq 5 \therefore m = 3, 4, 5$

(5) (i)$m = 3$ のとき $3 < 2n/(n-2)$ これを解き $n < 6 \therefore n = 3, 4, 5$

(ii)$m = 4$ のとき $4 < 2n/(n-2)$ これを解き $n < 4, \therefore n = 3$

(iii)$m = 5$ のとき $5 < 2n/(n-2)$ これを解き $n < 10/3, \therefore n = 3$

以上から$(m, n) = (3, 3)(3, 4)(3, 5)(4, 3)(5, 3)$

(6)「不等式を満たす (m, n) の組みは 5 通りあり, 正多面体の 5 種類に対応している。」

$\boxed{2}$

(1) $\mathrm{B}(-1, 7)$

$\mathrm{C}(p, q)$ とする。AC の中点 $\mathrm{M}((p+1)/2, (q+7)/2)$ が l 上にあるから $(q+7)/2 = 2 \times (p+1)/2$。

また, 直線 AC が l に垂直であることから $(q-7)/(p-1) \times 2 = -1$。整理して連立方程式を解き, $\mathrm{C}(5, 5)$

(2) AP+PQ+QA=BP+PQ+QC であるから, 長さが最小となるのは BPQC が一直線となるとき。

直線 BC の方程式は $y = (5-7)/(5-(-1))(x-5) + 5 = -1/3x + 20/3$。$\mathrm{P}(0, 20/3)$。Q は直線 BC と l との交点で, 連立方程式を解いて得られる。$\mathrm{Q}(20/7, 40/7)$

(3) 略

$\boxed{3}$ (1) $f(x) = x^3 - x^2$ とする。$f'(x) = 3x^2 - 2x$。$(t, t^3 - t^2)$ における接線は $y = (3t^2 - 2t)(x - t) + t^3 - t^2$。$(0, 3)$ を通ることから, $2t^3 - t^2 + 3 = (t+1)(2t^2 - 3t + 3) = 0$。$2t^2 - 3t + 3 = 0$ の判別式 D として, $D = 9 - 24 < 0$ なので, 実数解を持たない。よって, $t = -1$ がただ一つの解。接点は $(-1, -2)$。

(2) 接線の方程式は $y = 5(x+1) - 2 = 5x + 3$。$y = f(x)$ との交点 x 座標は

$x^3 - x^2 = 5x + 3 \therefore (x-3)(x+1)^2 = 0, x = -1, 3$。囲まれる部分の面積は

$$S = \int_{-1}^{3} ((5x+3) - (x^3 - x^2))dx = -\int_{-1}^{3} (x+1)^2(x-3)dx = -\int_{-1}^{3} (x+1)^2(x+1-4)dx =$$

$$-\int_{-1}^{3} ((x+1)^3 - 4(x+1)^2)dx = -\left[1/4(x+1)^4 - 4/3(x+1)^3\right]_{-1}^{3} = 64/3$$

$\boxed{4}$ (1) $y = 1 - \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$ と変形。グラフ略

(2) $f(x) = e^x(1 - \sin x) - 1$ とおくと $f'(x) = e^x(1 - \sin x) - e^x \cos x = e^x(1 - \sin x - \cos x) = e^x(1 - \sqrt{2}\sin(x + \pi/4))$

$e^x > 0$ が常に成り立つ。$f'(x) = 0$ となる x は $x + \pi/4 = 2n\pi + \pi/4$, または $2n\pi + 3/4\pi$(n は整数) $\therefore x = 2n\pi, 2n\pi + \pi/2$

符号を考え, 極大となるのは, $x = 2n\pi$ のとき (n は整数)。

(3) $x \geqq 0$ のとき, n=0, 1 の付近での増減表は以下の通り

x	0	...	$\pi/2$	...	2π	...	$5/2\pi$	...	4π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-1	↗	極大	↘	-1	↗	極大

また, $f(2n\pi) = e^{2n\pi} - 1 > 0 (n > 0)$ である。

$x > 0$ のとき $f'(\mathrm{x})$ の極小値は $x = \pi/2 + 2n\pi$ のとき-1。極大値は $x = 2n\pi$ のとき $e^{2n\pi} - 1 (> 0)$ であり, $f(x)$ は連続関数だから, $f(x) = 0$ は無数の解を持つ。

(4) 同様に, $x < 0$ のとき $f(2n\pi) = e^{2n\pi} - 1 < 0 (n < 0)$ となり常に $f(x) < 0$ となるので, $f(x) = 0$ は解を持たない。

（参考：$1 - \sin x$(無数のゼロ点を持つ）に指数関数 e^x をかけ算したグラフ。そこに横ぐし ($y = 1$）を通す形)

$\boxed{5}$

(1)2 通り

(2)2 点を結ぶ線が中心を通る選び方は 3 通り。残った 4 つの点から 1 つ頂点を選ぶと円周角が直角, 直角三角形になる。

$3 \times 4 = 12$ 通り

(3) サイコロを 3 回振って出る場合の数は 6^3 通り。二等辺三角形となるのは頂点の選び方が (1, 2, 3)(1, 2, 6)(1, 5, 6)(2, 3, 4)(3, 4, 5)(4, 5, 6) となる 6 通り。出る順番は問わないので, 求める確率 P は $P = 6 \times 3!/6^3 = 1/6$

(4) 正三角形のとき, 面積最大。一辺 $\sqrt{3}$ だから, $3\sqrt{3}/4$

（参考：3 頂点を選んでできる 3 角形は全部で ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通りある。内訳は, 正三角形 2, 二等辺三角形 6, 直角三角形 12）