問題 I 次の4問から2問を選んで解答しなさい。

(1) 1次不等式 $\sqrt{2}(x-1) > \sqrt{5}(2x-1)$ を解きなさい。

(2) 3つの数 x，480，1800 について，$x < 480$，最大公約数が 12，最小公倍数が 21600 のとき，x の値を求めなさい。

(3) 次の命題の対偶を述べ，その真偽を答えなさい。

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad ならば \quad x^2 - 1 = 0 \text{ である。}$$

(4) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta$ の値を求めなさい。

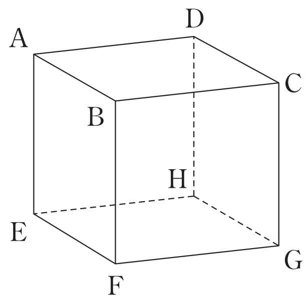
問題 II a を実数とする。2 次関数 $y = x^2 - 2ax + 4a + 12$ のグラフ C について，次の各問に答えなさい。

(1) C の頂点の座標を求めなさい。

(2) C が x 軸と共有点をもたないとき，a のとり得る値の範囲を求めなさい。

(3) C が x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わるとき，a のとり得る値の範囲を求めなさい。

問題 III 図のような1辺の長さが1である立方体ABCD－EFGHについて，次の各問に答えなさい。



(1) この立方体の8個の頂点から異なる4個の頂点を選ぶとき，選んだ4個の頂点を結ぶと正方形ができる確率を求めなさい。

(2) この立方体の8個の頂点から異なる3個の頂点を選ぶとき，選んだ3個の頂点を結ぶと正三角形ができる確率を求めなさい。

(3) この立方体の8個の頂点から異なる4個の頂点を選ぶとき，選んだ4個の頂点を結ぶと正四面体ができる確率を求めなさい。

(4) 立方体の1つの頂点にいる点Pは，今いる頂点と辺で結ばれている3つの頂点のいずれかに1秒ごとに等確率で移動する。このとき，点Pが頂点Aを出発して4秒後に頂点Aに戻る確率を求めなさい。また，点Pが頂点Aを出発して4秒後に初めて頂点Aに戻る確率を求めなさい。

問題 IV 3つの自然数$A = 2^{30}$，$B = 3^{20}$，$C = 7^{10}$について，次の各問に答えなさい。

(1) 3個の自然数A，B，Cの大小を，不等号を用いて表しなさい。

(2) $\log_{16} A$の値を求めなさい。

(3) $C^{\log_7 2}$の値を求めなさい。

(4) $\dfrac{1}{B}$を小数で表したとき，初めて0でない数字が現れるのは小数第何位かを求めなさい。
ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$とする。

問題 V　a を実数とする。関数 $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + ax + \dfrac{5}{3}$ について，次の各問に答えなさい。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の最大値を a を用いて表しなさい。

(2) $f(x)$ が極値をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めなさい。

以下，$a = 3$ として答えなさい。

(3) $f(x) = 0$ を満たす x，および $f(x)$ の極値を求めて，関数 $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。

(4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

(5) 7つの点 $(-1, f(-1))$，$(0, f(0))$，$(1, f(1))$，$(2, f(2))$，$(3, f(3))$，$(4, f(4))$，$(5, f(5))$ を順に線分で結んで得られる折れ線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい。

数学　解答

問題 I

（1）式と計算・1次不等式（数学 I）

$\sqrt{2}(x-1) > \sqrt{5}(2x-1) \iff (\sqrt{2}-2\sqrt{5})x > \sqrt{2}-\sqrt{5}$

ここで，$2\sqrt{5}=\sqrt{20}$ より，$\sqrt{2}-2\sqrt{5}<0$ であるから，$x < \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$

$\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-2\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-2\sqrt{5})(\sqrt{2}+2\sqrt{5})} = \dfrac{2+2\sqrt{10}-\sqrt{10}-10}{2-20} = \dfrac{8-\sqrt{10}}{18}$ より，

$\underline{x < \dfrac{8-\sqrt{10}}{18}}$

（2）整数の性質（数学 A）

$480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$，$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$，最大公約数 $12 = 2^2 \cdot 3$，最小公倍数 $21600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

より，$x = 2^2 \cdot 3^3 = \underline{108}$

（3）集合と論理（数学 I）

「$x^2-4x+3=0$　ならば　$x^2-1=0$ である。」の対偶は

「$\underline{x^2-1\neq 0}$　<u>ならば</u>　$\underline{x^2-4x+3\neq 0}$ <u>である。</u>」この命題は<u>偽</u>である。（反例は $x=3$）

（4）図形と計量（数学 I）

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{9}$ より，

$\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{4}{9}$

また，$(\sin\theta-\cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1-2\left(-\dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{17}{9}$

ここで，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ と $\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{4}{9} < 0$ より，$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$ であるから，

$\sin\theta - \cos\theta > 0$

よって，$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{\dfrac{17}{9}} = \underline{\dfrac{\sqrt{17}}{3}}$

数学　解答

問題Ⅱ　2次関数（数学Ⅰ）

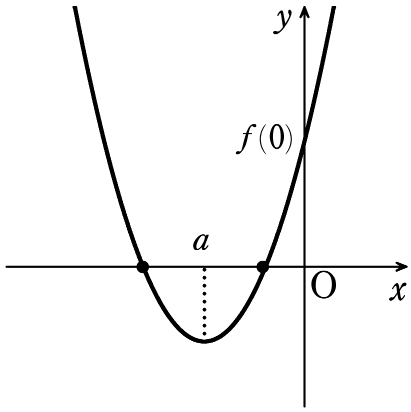
$f(x)=x^2-2ax+4a+12$ とする。

（1） $f(x)=(x-a)^2-a^2+4a+12$ より，C の頂点の座標は $\underline{(a,-a^2+4a+12)}$

（2） C が x 軸と共有点をもたないとき，頂点の y 座標が正であればよいので，

$-a^2+4a+12>0 \iff (a-6)(a+2)<0$ より，$\underline{-2<a<6}$

（3）満たすべき条件は $\begin{cases} -a^2+4a+12<0 \cdots\cdots ① \\ a<0 \cdots\cdots ② \\ f(0)=4a+12>0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$



①：$(a-6)(a+2)>0$ より，$a<-2$，$6<a$

③：$a>-3$

よって，$\underline{-3<a<-2}$

数学　解答

問題Ⅲ　確率（数学A）と図形の性質（数学A）の融合問題

（1）4個の頂点の選び方は全部で ${}_8C_4=70$ 通りあって，選んだ4個を結ぶと正方形になるのは立方体の各面上の4点を選ぶときなので6通り。よって，求める確率は $\dfrac{6}{70}=\underline{\dfrac{3}{35}}$

（2）3個の頂点の選び方は全部で ${}_8C_3=56$ 通りあって，選んだ3個を結ぶと正三角形になるのは，例えばA，C，Fを選んだときで，合計8通り。よって，求める確率は $\dfrac{8}{56}=\underline{\dfrac{1}{7}}$

（3）4個の頂点の選び方は全部で ${}_8C_4=70$ 通りあって，選んだ4個を結ぶと正四面体になるのは，{A，C，F，H}，{B，D，E，G} を選んだときで，2通り。

よって，求める確率は $\dfrac{2}{70}=\underline{\dfrac{1}{35}}$

（4）4秒後に点Pが頂点Aに戻る移動の仕方のうち，最初にBに移動する場合は次の7通り。

A→B→A→B→A
A→B→A→D→A
A→B→A→E→A
A→B→C→B→A　……（※）
A→B→C→D→A　……（※）
A→B→F→B→A　……（※）
A→B→F→E→A　……（※）

同様に考えて，最初にD，Eに移動する場合も，それぞれ7通りずつであるので，
4秒後に点Pが頂点Aに戻る移動の仕方は全部で $7\cdot3$ 通りである。よって，求める確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\cdot(7\cdot3)=\underline{\dfrac{7}{27}}$

また，初めて4秒後に点Pが頂点Aに戻る移動の仕方のうち，最初にBに移動する場合は（※）の4通り。

最初にD，Eに移動する場合も考えて，求める確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\cdot(4\cdot3)=\underline{\dfrac{4}{27}}$

数学　解答

問題Ⅳ　指数・対数関数（数学Ⅱ）

（１）$A=2^{30}=\left(2^3\right)^{10}=8^{10}$，$B=3^{20}=\left(3^2\right)^{10}=9^{10}$，$C=7^{10}$ より，$\underline{C<A<B}$

（２）$\log_{16}A=\dfrac{\log_2 2^{30}}{\log_2 16}=\dfrac{30}{4}=\underline{\dfrac{15}{2}}$

（３）$C^{\log_7 2}=\left(7^{10}\right)^{\log_7 2}=\left(7^{\log_7 2}\right)^{10}=2^{10}=\underline{1024}$

（４）$\log_{10}\dfrac{1}{B}=\log_{10}3^{-20}=-20\log_{10}3=-20\times 0.4771=-9.542$ より

$-10<\log_{10}\dfrac{1}{B}<-9$，つまり $10^{-10}<\dfrac{1}{B}<10^{-9}$ であるので，

<u>小数第 10 位</u>に初めて 0 でない数字が現れる。

数学　解答

問題Ⅴ　微分法・積分法（数学Ⅱ）・2 次関数（数学Ⅰ）

（1） $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+ax+\dfrac{5}{3}$ から， $f'(x)=-x^2+2x+a=-(x-1)^2+a+1$

$f'(x)$ は $x=1$ で最大値 $\underline{a+1}$ をとる。

（2） $f(x)$ が極値をもつことは $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことと同値なので，

【解１】

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると，求める条件は $\dfrac{D}{4}=1^2-(-1)\cdot a>0$

よって， $\underline{a>-1}$

【解２】

$f'(x)=-(x-1)^2+a+1$ より，求める条件は $a+1>0$

よって， $\underline{a>-1}$

（3） $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x+\dfrac{5}{3}=0$

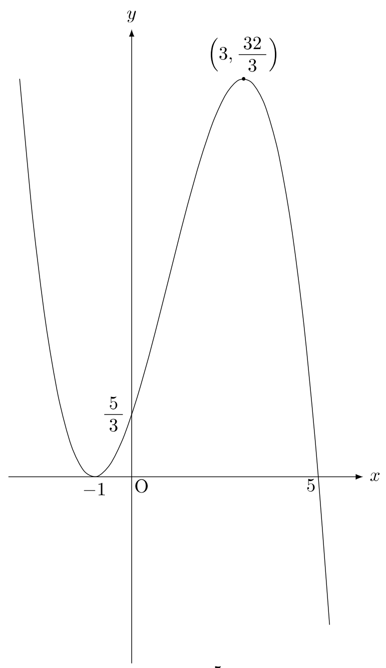
$\Leftrightarrow$ $(x+1)^2(x-5)=0$ $\Leftrightarrow$ $x=-1,\ 5$

$f'(x)=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$ より，

$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\dfrac{32}{3}$	↘

以上より，グラフは右図のようになる。



（4）求める面積は， $\displaystyle\int_{-1}^{5}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+\frac{5}{3}\right)dx=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{3}x\right]_{-1}^{5}=\underline{36}$

（5）求める図形を三角形と台形に分けて考えることで求める面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{16}{3}\right)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{16}{3}+9\right)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\left(9+\frac{32}{3}\right)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{32}{3}+\frac{25}{3}\right)\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{3}\cdot1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{16}{3}+9+\frac{32}{3}+\frac{25}{3}\right)\cdot2=\underline{35}$$