

問題 I 次の4問から2問を選んで解答しなさい。

(1) 1次不等式 $\sqrt{2}(x - 1) > \sqrt{5}(2x - 1)$ を解きなさい。

(2) 3つの数 x , 480, 1800 について, $x < 480$, 最大公約数が12, 最小公倍数が21600 のとき, x の値を求めなさい。

(3) 次の命題の対偶を述べ, その真偽を答えなさい。

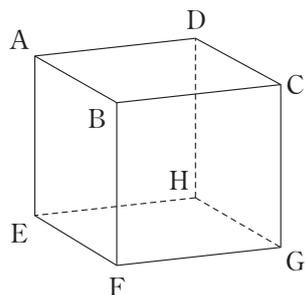
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{ならば} \quad x^2 - 1 = 0 \text{ である。}$$

(4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\sin \theta - \cos \theta$ の値を求めなさい。

問題 II a を実数とする。2 次関数 $y = x^2 - 2ax + 4a + 12$ のグラフ C について、次の各問に答えなさい。

- (1) C の頂点の座標を求めなさい。
- (2) C が x 軸と共有点をもたないとき、 a のとり得る値の範囲を求めなさい。
- (3) C が x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わる時、 a のとり得る値の範囲を求めなさい。

問題 III 図のような1辺の長さが1である立方体 $ABCD-EFGH$ について、次の各問に答えなさい。



- (1) この立方体の8個の頂点から異なる4個の頂点を選ぶとき、選んだ4個の頂点を結ぶと正方形ができる確率を求めなさい。
- (2) この立方体の8個の頂点から異なる3個の頂点を選ぶとき、選んだ3個の頂点を結ぶと正三角形ができる確率を求めなさい。
- (3) この立方体の8個の頂点から異なる4個の頂点を選ぶとき、選んだ4個の頂点を結ぶと正四面体ができる確率を求めなさい。
- (4) 立方体の1つの頂点にいる点Pは、今いる頂点と辺で結ばれている3つの頂点のいずれかに1秒ごとに等確率で移動する。このとき、点Pが頂点Aを出発して4秒後に頂点Aに戻る確率を求めなさい。また、点Pが頂点Aを出発して4秒後に初めて頂点Aに戻る確率を求めなさい。

数学 解答

問題 I

(1) 式と計算・1次不等式 (数学 I)

$$\sqrt{2}(x-1) > \sqrt{5}(2x-1) \Leftrightarrow (\sqrt{2}-2\sqrt{5})x > \sqrt{2}-\sqrt{5}$$

ここで、 $2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ より、 $\sqrt{2}-2\sqrt{5} < 0$ であるから、 $x < \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+2\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-2\sqrt{5})(\sqrt{2}+2\sqrt{5})} = \frac{2+2\sqrt{10}-\sqrt{10}-10}{2-20} = \frac{8-\sqrt{10}}{18} \text{ より,}$$

$$\underline{x < \frac{8-\sqrt{10}}{18}}$$

(2) 整数の性質 (数学 A)

$480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$, $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, 最大公約数 $12 = 2^2 \cdot 3$, 最小公倍数 $21600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$
より、 $x = 2^2 \cdot 3^3 = \underline{108}$

(3) 集合と論理 (数学 I)

「 $x^2 - 4x + 3 = 0$ ならば $x^2 - 1 = 0$ である。」の対偶は

「 $x^2 - 1 \neq 0$ ならば $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ である。」この命題は偽である。(反例は $x = 3$)

(4) 図形と計量 (数学 I)

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \text{ より,}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\text{また, } (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 - 2 \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{17}{9}$$

ここで、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ と $\sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9} < 0$ より、 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ であるから、

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\text{よって, } \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{17}{9}} = \underline{\frac{\sqrt{17}}{3}}$$

数学 解答

問題Ⅱ 2次関数 (数学Ⅰ)

$f(x) = x^2 - 2ax + 4a + 12$ とする。

(1) $f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 4a + 12$ より, C の頂点の座標は $(a, -a^2 + 4a + 12)$

(2) C が x 軸と共有点をもたないとき, 頂点の y 座標が正であればよいので,

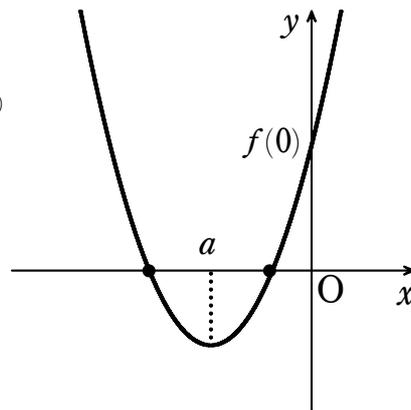
$$-a^2 + 4a + 12 > 0 \Leftrightarrow (a-6)(a+2) < 0 \text{ より, } \underline{-2 < a < 6}$$

(3) 満たすべき条件は $\begin{cases} -a^2 + 4a + 12 < 0 \dots\dots ① \\ a < 0 \dots\dots ② \\ f(0) = 4a + 12 > 0 \dots\dots ③ \end{cases}$

① : $(a-6)(a+2) > 0$ より, $a < -2, 6 < a$

③ : $a > -3$

よって, $\underline{-3 < a < -2}$



数学 解答

問題Ⅲ 確率(数学A)と図形の性質(数学A)の融合問題

- (1) 4個の頂点の選び方は全部で ${}_8C_4 = 70$ 通りあって、選んだ4個を結ぶと正方形になるのは立方体の各面上の4点を選ぶときなので6通り。よって、求める確率は $\frac{6}{70} = \frac{3}{35}$
- (2) 3個の頂点の選び方は全部で ${}_8C_3 = 56$ 通りあって、選んだ3個を結ぶと正三角形になるのは、例えばA, C, Fを選んだときで、合計8通り。よって、求める確率は $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$
- (3) 4個の頂点の選び方は全部で ${}_8C_4 = 70$ 通りあって、選んだ4個を結ぶと正四面体になるのは、{A, C, F, H}, {B, D, E, G}を選んだときで、2通り。
- よって、求める確率は $\frac{2}{70} = \frac{1}{35}$
- (4) 4秒後に点Pが頂点Aに戻る移動の仕方のうち、最初にBに移動する場合は次の7通り。

A→B→A→B→A

A→B→A→D→A

A→B→A→E→A

A→B→C→B→A …… (※)

A→B→C→D→A …… (※)

A→B→F→B→A …… (※)

A→B→F→E→A …… (※)

同様に考えて、最初にD, Eに移動する場合も、それぞれ7通りずつであるので、4秒後に点Pが頂点Aに戻る移動の仕方は全部で7・3通りである。よって、求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (7 \cdot 3) = \frac{7}{27}$$

また、初めて4秒後に点Pが頂点Aに戻る移動の仕方のうち、最初にBに移動する場合は(※)の4通り。

$$\text{最初にD, Eに移動する場合も考えて、求める確率は}\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (4 \cdot 3) = \frac{4}{27}$$