

以下の問題を解きなさい。結果だけでなく、途中のプロセスも答えること。

- 1 x, y, z を実数とする。

$$(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + x^2) = (xy + yz + zx)^2 \dots\dots\dots ①$$

が成り立つとき、 $x = y = z$ となることを証明しなさい。

- 2 k を実数とする。関数

$$y = x^3 + (k+2)x^2 + kx \dots\dots\dots ②$$

のグラフを C_1 ,

関数

$$y = 2x^2 + p \dots\dots\dots ③$$

のグラフを C_2 とする。

- (1) $p = 0, k = 0$ のとき、 C_1 と C_2 の概形を解答欄に図示しなさい。ただし、 C_1 と C_2 は同一座標平面上に描くこと。
 (2) (1) のとき、 C_1 が x 軸と交わる点の x 座標の最小のものを α とする。曲線 C_1, C_2 , および $x = \alpha$ で囲まれた部分の面積を求めなさい。
 (3) p がすべての実数の範囲を動くとき、 C_1 と C_2 がただ 1 つの共有点を持つような実数 k の値の範囲を求めなさい。

- 3 1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇ることにした。ただし、1 歩で 2 段昇ることは連続では行わないとする。 n 段を昇る昇り方を a_n とする (n は自然数)。たとえば、2 段を昇る昇り方 a_2 は、1 歩で 1 段ずつ昇る場合と 1 歩で 2 段昇る場合の 2 通りなので、 $a_2 = 2$ である。

- (1) a_1, a_3, a_4 をそれぞれ求めなさい。
 (2) a_5 を求めなさい。
 (3) $n \geq 4$ のとき、 a_n の漸化式を求めなさい。
 (4) a_{10} を求めなさい。

- 4 x, y を実数とする。

- (1) 方程式

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x} \dots\dots\dots ④$$

で表される曲線はどのような図形か。結論を 30 字以内程度で簡潔にまとめなさい。途中の変形プロセス等は字数に含めなくてよい。

- (2) 方程式 $2x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$ を y についての 2 次方程式とみて、 y について解きなさい。また x の値のとりうる範囲を求めなさい。
 (3) (2) の方程式で表される曲線によって囲まれた部分の面積を求めなさい。

- 5 円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, \angle BAD = \theta$ とする。

- (1) 円に内接する四角形であることを利用して、対角線 BD の長さを、 θ を含まない a, b, c, d の式で表しなさい。
 (2) 次の関係式

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC \dots\dots\dots ⑤$$

が成り立つことを証明しなさい。

- (3) 関係式⑤を使って、一辺の長さ 1 の正五角形の対角線の長さを求めなさい。
 (4) $\cos 108^\circ$ の値を求めなさい。

略解 (解答は一例。途中の計算などは省略している。)

① 左辺, 右辺をそれぞれ展開し, 差をつくると

$$\begin{aligned} \text{左辺} - \text{右辺} &= x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2xy^2z - 2xyz^2 - 2x^2yz \\ &= (x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2 = 0 \end{aligned}$$

x, y, z は実数なので

$$x^2 = yz \cdots \textcircled{1}$$

$$y^2 = zx \cdots \textcircled{2}$$

$$z^2 = xy \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。① + ② + ③より $x^2 + y^2 + z^2 = yz + zx + xy \therefore (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$ 。同じく x, y, z は実数なので $x = y, y = z, z = x \therefore x = y = z$ を得る。

② (1) $p = k = 0$ のとき $y = x^3 + 2x^2$ 及び $y = 2x^2$ 。グラフ略。

参考: $y = x^3 + 2x^2$ の増減表を作りグラフを描く。 $k=0$ は (1) の場合に含まれるので C_1 と C_2 は原点がただ一つの共有点となることに留意。④の参考も見よ。

(2) $x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2) = 0$ より, $x = 0, -2$ 。 $\therefore \alpha = -2$ 。求める面積を S とすると

$$S = \int_{-2}^0 (2x^2 - (x^3 + 2x^2)) dx = - \int_{-2}^0 x^3 dx = 1/4 \left[x^4 \right]_0^{-2} = 4。$$

(3) $y = x^3 + (k + 2)x^2 + kx = 2x^2 + p$ を p について解き $p = x^3 + kx^2 + kx$ 。

共有点がただ一つとなるのは, 左辺の 3 次関数 $f(x) = x^3 + kx^2 + kx$ と $y = p$ がただ一つの共有点を持つとき。つまり, すべての実数 x に対して $f'(x) = 3x^2 + 2kx + k \geq 0$ が成り立てばよい。 $f'(x) = 0$ の判別式を D として $D/4 = k^2 - 3k \leq 0$
 $\therefore 0 \leq k \leq 3$

③ (1) $a_1 = 1, a_3 = 3, a_4 = 4$

(2) 5 段昇るには, 最初に 1 段昇る場合と最初に 2 段昇る場合がある。最初に 1 段昇る場合, 残りは 4 段なので $a_4 = 4$ 。最初に 2 段昇る場合, 次は必ず 1 段で, 残りは 2 段なので $a_2 = 2$ 。これらに重複なく洩れはないので, $a_5 = a_4 + a_2 = 6$

(3) (2) の考察と同様に $n \geq 4$ のとき $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$

(4) (3) の漸化式を順に求め, $a_{10} = 41$

④ (1) 変形して $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 。中心 $(1, 0)$, 半径 1 の円周の $y \geq 0$ の部分

(2) $y = x \pm \sqrt{1 - (x - 1)^2} = x \pm \sqrt{-x^2 + 2x}$ 。根号内 ≥ 0 より, $-x^2 + 2x \geq 0$ 。 $\therefore 0 \leq x \leq 2$

(3) 根号 ≥ 0 なので, 曲線 $y_1 = x + \sqrt{-x^2 + 2x}$ は直線 $y = x$ より常に上側 (または直線上), $y_2 = x - \sqrt{-x^2 + 2x}$ は直線 $y = x$ より常に下側 (または直線上) にある。 x の範囲は (2) より $0 \leq x \leq 2$ 。求める面積 S は

$$S = \int_0^2 (y_1 - y_2) dx = 2 \int_0^2 (\sqrt{-x^2 + 2x}) dx。これは (1) より, 半径 1 の半円の面積の 2 倍を表すので, $\pi$$$

参考: (2) は, $y = x$ のグラフに対して, 半円がプラスされて膨らんだ部分と, 半円がマイナスされて下に下がった部分で出来ている。WolframAlpha (<https://ja.wolframalpha.com/>) などの数式処理ソフトを利用すればグラフを描かせることができ, 理解が深まる。 $2x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0, y = x$ と入力してみよ。

⑤ $\angle BAD = \theta, \angle BCD = \pi - \theta$ 。余弦定理より, $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta \cdots \textcircled{1}$

また, $BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\pi - \theta) = b^2 + c^2 + 2bc \cos \theta \cdots \textcircled{2}$

①, ②から $\cos \theta$ を消去。 $(bc + ad)BD^2 = (ab + cd)(ac + bd)$

$$\therefore BD = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \cdots \textcircled{3}$$

(2) (1) と同様に, $AC = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$

$$\therefore AC \cdot BD = ac + bd = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

参考: $\angle CBA = \alpha$ とすれば (1) と同様の計算なので, ③の a, b, c, d を d, a, b, c に入れ替えれば AC が得られる。

(3) 正五角形 ABCDE, その対角線の長さを x とする。正五角形は円に内接するので, 四角形 ABCD に対して (2) の結果を用いる。 $x \cdot x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x$ 。 $\therefore x^2 - x - 1 = 0$ 。 $x > 0$ なので $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(4) 正五角形なので $\angle ABC = 108^\circ$ 。余弦定理より, $\cos 108^\circ = \frac{1^2 + 1^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$