問題 I 次の 4 問から 2 問を選んで解答しなさい。

(1) 2 次方程式 $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ を解きなさい。

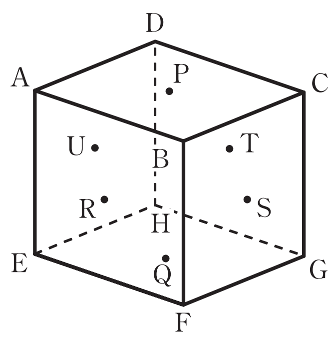
(2) $x^2 - 4y^2 = 33$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めなさい。

(3) $U = \{x \mid |2x - 3| < 17$ を満たす自然数$\}$ を全体集合とする。
U の部分集合 $A = \{x \mid x$ は素数$\}$，$B = \{x \mid 3 \leqq x \leqq 8\}$ について，$A \cap \overline{B}$ と $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$ を求めなさい。

(4) 1 辺の長さが 4 の正六面体 ABCD－EFGH について，各面の正方形の対角線の交点を下の図のように P，Q，R，S，T，U とする。
この正六面体を 8 つの平面

PRS，PST，PTU，PUR，QRS，QST，QTU，QUR

で切る。新しくできた立体 PRSTUQ の表面積を求めなさい。



問題 II a を実数とする。$f(x) = 2x^2 + 4x + a^2 + a$ のとき，$y = f(x)$ のグラフを C とする。次の各問に答えなさい。

(1) $a = 1$ のとき，C の頂点の座標を求めなさい。

(2) C の頂点が直線 $y = x$ 上にあるとき，a の値を求めなさい。

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x で $f(x) \leqq 18$ が成り立つとき，a のとり得る値の範囲を求めなさい。

問題 III 1辺の長さが1である正六角形ABCDEFについて，対角線の本数を n，$\angle$ABD の二等分線と対角線ADの交点をPとする。次の各問に答えなさい。

(1) n の値を求めなさい。

(2) n 本の対角線の長さの総和を求めなさい。

(3) 線分DPの長さを求めなさい。

(4) 直線BPと辺EFの交点をQとするとき，線分EQの長さを求めなさい。

問題 IV　O を原点とする座標平面上に 2 点 A $(4, 2)$，B $(2, 6)$ がある。$\angle \mathrm{AOB} = \theta$ とおく。このとき，次の各問に答えなさい。

(1)　3 直線 OA，OB，AB の方程式をそれぞれ求めなさい。

(2)　$\angle \mathrm{OAB}$ の大きさを求めなさい。

(3)　$\triangle \mathrm{OAB}$ の外接円の方程式を求めなさい。

(4)　$\tan\theta$ と θ をそれぞれ求めなさい。

(5)　点 P (x, y) が $\triangle \mathrm{OAB}$ の周および内部を動くとき，$x^2 + y^2$ の最大値を求めなさい。

問題 V $f(x) = -x^2 + 4x$，$g(x) = -x^2 + 10x - 18$ とする。放物線 $C_1 : y = f(x)$，$C_2 : y = g(x)$ の頂点をそれぞれ P，Q とし，C_1 と C_2 の交点を R とする。3 点 P，Q，R を通り，軸が y 軸に平行な放物線を C_3 とするとき，次の各問に答えなさい。

(1) P，Q，R の座標を求めなさい。

(2) 1 つの座標平面上に放物線 C_1 と放物線 C_2 を描きなさい。

(3) 放物線 C_3 の方程式を求めなさい。

(4) R を通り，x 軸に平行な直線を l とする。l と C_1，および C_2 で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めなさい。

(5) C_1 と C_2，および C_3 で囲まれた 2 つの部分の面積の差を求めなさい。

解答

問題Ｉ

（１）無理数の計算，２次方程式の融合問題（数学Ｉ）

$$\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 2x^2+\sqrt{6}x-2=0 \Leftrightarrow x=\underline{\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{22}}{4}}$$

（別解） $x=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-4\cdot\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}=\underline{\dfrac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{22}}{4}}$

（２）展開・因数分解，整数の融合問題（数学Ｉ・A）

$x^2-4y^2=33 \Leftrightarrow (x+2y)(x-2y)=33$ であり，x，y は自然数より，

$x+2y>x-2y$ かつ $x+2y>0$

よって，$\begin{cases}x+2y=33\\x-2y=1\end{cases}$ または $\begin{cases}x+2y=11\\x-2y=3\end{cases}$

以上より，$(x,y)=\underline{(17,8),(7,2)}$

（３）集合と命題（数学Ｉ）

$|2x-3|<17 \Leftrightarrow -17<2x-3<17 \Leftrightarrow -7<x<10$ より，$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{3,4,5,6,7,8\}$，$\overline{B}=\{1,2,9\}$ より，$A\cap\overline{B}=\underline{\{2\}}$

また，$\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})}=\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}=A\cap B=\underline{\{3,5,7\}}$

（４）図形の性質（数学A）

立体 PRSTUQ は正八面体であり，この正八面体の一辺の長さを x とすると

$\mathrm{US}=\sqrt{2}x=4$ より，$x=2\sqrt{2}$

よって，求める表面積は一辺の長さが $2\sqrt{2}$ の正三角形８個分なので，

$8\times\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin60^\circ=\underline{16\sqrt{3}}$

問題Ⅱ 2次関数（数学Ⅰ）

$f(x)=2x^2+4x+a^2+a=2(x+1)^2+a^2+a-2$ より，C の頂点の座標は $(-1,\ a^2+a-2)$

（1） $a=1$ のとき，C の頂点の座標は $\underline{(-1,\ 0)}$

（2） C の頂点が直線 $y=x$ 上にあるとき，$a^2+a-2=-1 \Leftrightarrow a^2+a-1=0$

よって，$\underline{a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

（3） $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値は，$f(1)=a^2+a+6$

よって，$a^2+a+6\leqq 18 \Leftrightarrow (a-3)(a+4)\leqq 0$ より，$\underline{-4\leqq a\leqq 3}$

問題Ⅲ

図形と計量（数学Ⅰ），図形の性質（数学 A），場合の数（数学 A）の融合問題

（1） $n={}_6C_2-6=15-6=\underline{9}$

（2） 正六角形の中心を通る対角線は長さが 2 であり，3 本

正六角形の中心を通らない対角線は長さが $\sqrt{3}$ であり，6 本

よって，対角線の長さの総和は $2\times3+\sqrt{3}\times6=\underline{6(1+\sqrt{3})}$

（3） 角の二等分線と比の関係より，$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=1:\sqrt{3}$

よって，$\mathrm{DP}=\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot2=\underline{3-\sqrt{3}}$

（4） 直線 BA，BD と直線 EF の交点をそれぞれ R，S とする。

$\triangle\mathrm{BAD}\backsim\triangle\mathrm{BRS}$，$\triangle\mathrm{BPD}\backsim\triangle\mathrm{BQS}$ となり，相似比は $1:2$

よって，$\mathrm{EQ}=\mathrm{SQ}-\mathrm{SE}=2\mathrm{DP}-\mathrm{SE}=6-2\sqrt{3}-2=\underline{4-2\sqrt{3}}$

問題Ⅳ 図形と方程式，三角関数（数学Ⅱ）の融合問題

（1）直線 OA の傾きは $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ より，方程式は $\underline{y=\frac{1}{2}x}$

直線 OB の傾きは $\frac{6}{2}=3$ より，方程式は $\underline{y=3x}$

直線 AB の傾きは $\frac{6-2}{2-4}=-2$ より，方程式は $y=-2(x-4)+2$，つまり $\underline{y=-2x+10}$

（2）(OA の傾き)$\times$(AB の傾き)$=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$ より，$\angle\mathrm{OAB}=\underline{90^\circ}$

（3）$\angle\mathrm{OAB}=90^\circ$ より，$\triangle\mathrm{OAB}$ の外接円の中心（外心）は辺 OB の中点 $(1, 3)$ であって，

半径が $\frac{1}{2}\mathrm{OB}=\sqrt{10}$ なので，

求める方程式は $\underline{(x-1)^2+(y-3)^2=10}$（もしくは，$\underline{x^2+y^2-2x-6y=0}$）

（4）x 軸上の点 $\mathrm{C}(1, 0)$ に対して，$\angle\mathrm{COA}=\alpha$，$\angle\mathrm{COB}=\beta$ とすると，

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=3$ であるので，　$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot 3}=\underline{1}$

$0<\theta<90^\circ$ より，$\theta=\underline{45^\circ}$ $\left(\theta=\underline{\frac{\pi}{4}}\right)$

（5）$x^2+y^2=k$ となり得ることは，円 $x^2+y^2=k$ と$\triangle\mathrm{OAB}$ が共有点をもつことなので，
円 $x^2+y^2=k$ が O から最も離れた点である $\mathrm{B}(2, 6)$ を通るとき，x^2+y^2 が最大となる。

よって，x^2+y^2 の最大値は $2^2+6^2=\underline{40}$

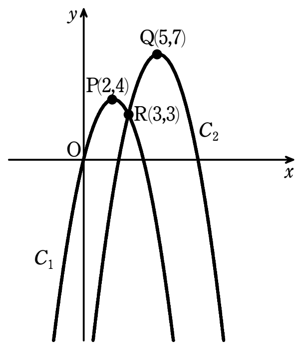
問題Ⅴ 微分法と積分法（数学Ⅱ）・2 次関数（数学Ⅰ）の融合問題

（1） $f(x)=-(x-2)^2+4$， $g(x)=-(x-5)^2+7$ より， $\mathrm{P}(2,4)$， $\mathrm{Q}(5,7)$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow -x^2+4x=-x^2+10x-18 \Leftrightarrow x=3$ より， $\mathrm{R}(3,3)$

よって， $\underline{\mathrm{P}(2,\ 4),\ \mathrm{Q}(5,\ 7),\ \mathrm{R}(3,3)}$

（2）図は右の通り。



（3）放物線 C_3 は $y=ax^2+bx+c$ とおけて，3 点 $\mathrm{P}(2,4)$， $\mathrm{Q}(5,7)$， $\mathrm{R}(3,3)$ を通るので，

$\begin{cases} 4=4a+2b+c \\ 7=25a+5b+c \\ 3=9a+3b+c \end{cases}$ が成り立つ。これを解いて， $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=12 \end{cases}$

よって，放物線 C_3 の方程式は $\underline{y=x^2-6x+12}$

（4）（1）より $\mathrm{R}(3,3)$ なので， l は $y=3$

$f(x)=3 \Leftrightarrow -x^2+4x=3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=1,3$

$g(x)=3 \Leftrightarrow -x^2+10x-18=3 \Leftrightarrow (x-3)(x-7)=0 \Leftrightarrow x=3,7$ であるので，

求める面積の和は

$$\int_1^3(-x^2+4x-3)dx+\int_3^7(-x^2+10x-18-3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3+\left[-\frac{1}{3}x^3+5x^2-21x\right]_3^7=\underline{12}$$

（5） $x^2-6x+12=-x^2+4x \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=2,3$，

$x^2-6x+12=-x^2+10x-18 \Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-5)=0 \Leftrightarrow x=3,5$ より，

C_1 と C_3 で囲まれた部分の面積は

$$\int_2^3\left\{(-x^2+4x)-(x^2-6x+12)\right\}dx=-2\int_2^3(x^2-5x+6)dx=-2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x\right]_2^3=\frac{1}{3}$$

C_2 と C_3 で囲まれた部分の面積は

$$\int_3^5\left\{(-x^2+10x-18)-(x^2-6x+12)\right\}dx=-2\int_3^5(x^2-8x+15)dx=-2\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+15x\right]_3^5=\frac{8}{3}$$

よって，求める面積の差は $\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\underline{\frac{7}{3}}$