問題 I 次の4問から2問を選んで解答しなさい。

(1) 2次方程式 $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ を解きなさい。

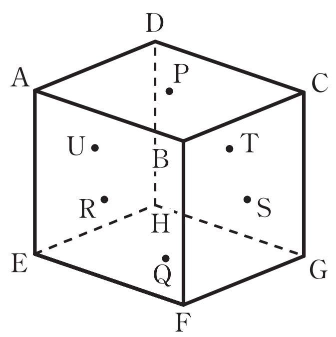
(2) $x^2 - 4y^2 = 33$ を満たす自然数 x，y の組をすべて求めなさい。

(3) $U = \{x \mid |2x - 3| < 17$ を満たす自然数$\}$ を全体集合とする。
U の部分集合 $A = \{x \mid x$ は素数$\}$，$B = \{x \mid 3 \leqq x \leqq 8\}$ について，$A \cap \overline{B}$ と $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B})}$ を求めなさい。

(4) 1辺の長さが4の正六面体ABCD－EFGHについて，各面の正方形の対角線の交点を下の図のようにP，Q，R，S，T，Uとする。
この正六面体を8つの平面

PRS，PST，PTU，PUR，QRS，QST，QTU，QUR

で切る。新しくできた立体PRSTUQの表面積を求めなさい。



問題 II a を実数とする。$f(x) = 2x^2 + 4x + a^2 + a$ のとき，$y = f(x)$ のグラフを C とする。次の各問に答えなさい。

(1) $a = 1$ のとき，C の頂点の座標を求めなさい。

(2) C の頂点が直線 $y = x$ 上にあるとき，a の値を求めなさい。

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x で $f(x) \leqq 18$ が成り立つとき，a のとり得る値の範囲を求めなさい。

問題 III 1 辺の長さが 1 である正六角形 ABCDEF について，対角線の本数を n，$\angle$ABD の二等分線と対角線 AD の交点を P とする。次の各問に答えなさい。

(1) n の値を求めなさい。

(2) n 本の対角線の長さの総和を求めなさい。

(3) 線分 DP の長さを求めなさい。

(4) 直線 BP と辺 EF の交点を Q とするとき，線分 EQ の長さを求めなさい。

解答

問題 I

（1）無理数の計算，2 次方程式の融合問題（数学 I ）

$$\sqrt{2}x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 2x^2+\sqrt{6}x-2=0 \Leftrightarrow x=\underline{\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{22}}{4}}$$

（別解） $x=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-4\cdot\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2})}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}=\underline{\dfrac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{22}}{4}}$

（2）展開・因数分解，整数の融合問題（数学 I ・A）

$x^2-4y^2=33 \ \Leftrightarrow \ (x+2y)(x-2y)=33$ であり，x，y は自然数より，

$x+2y>x-2y$ かつ $x+2y>0$

よって，$\begin{cases} x+2y=33 \\ x-2y=1 \end{cases}$ または $\begin{cases} x+2y=11 \\ x-2y=3 \end{cases}$

以上より，$(x, y)=\underline{(17, 8), (7, 2)}$

（3）集合と命題（数学 I ）

$|2x-3|<17 \ \Leftrightarrow \ -17<2x-3<17 \ \Leftrightarrow \ -7<x<10$ より，$U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A=\{2, 3, 5, 7\}$，$B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，$\overline{B}=\{1, 2, 9\}$ より，$A\cap\overline{B}=\underline{\{\,2\,\}}$

また，$\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})}=\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}=A\cap B=\underline{\{3, 5, 7\}}$

（4）図形の性質（数学 A）

立体 PRSTUQ は正八面体であり，この正八面体の一辺の長さを x とすると

$\mathrm{US}=\sqrt{2}x=4$ より，$x=2\sqrt{2}$

よって，求める表面積は一辺の長さが $2\sqrt{2}$ の正三角形 8 個分なので，

$$8\times\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin60^\circ=\underline{16\sqrt{3}}$$

問題Ⅱ 2次関数（数学Ⅰ）

$f(x)=2x^2+4x+a^2+a=2(x+1)^2+a^2+a-2$ より，C の頂点の座標は $(-1,\ a^2+a-2)$

（1） $a=1$ のとき，C の頂点の座標は $\underline{(-1,\ 0)}$

（2） C の頂点が直線 $y=x$ 上にあるとき，$a^2+a-2=-1 \iff a^2+a-1=0$

よって，$\underline{a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

（3） $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値は，$f(1)=a^2+a+6$

よって，$a^2+a+6\leqq 18 \iff (a-3)(a+4)\leqq 0$ より，$\underline{-4\leqq a\leqq 3}$

問題Ⅲ

図形と計量（数学Ｉ），図形の性質（数学 A），場合の数（数学 A）の融合問題

（1） $n={}_6C_2-6=15-6=\underline{9}$

（2） 正六角形の中心を通る対角線は長さが 2 であり，3 本

正六角形の中心を通らない対角線は長さが $\sqrt{3}$ であり，6 本

よって，対角線の長さの総和は $2\times3+\sqrt{3}\times6=\underline{6(1+\sqrt{3})}$

（3） 角の二等分線と比の関係より， $\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=\mathrm{BA}:\mathrm{BD}=1:\sqrt{3}$

よって， $\mathrm{DP}=\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot2=\underline{3-\sqrt{3}}$

（4） 直線 BA，BD と直線 EF の交点をそれぞれ R，S とする。

$\triangle\mathrm{BAD}\backsim\triangle\mathrm{BRS}$，$\triangle\mathrm{BPD}\backsim\triangle\mathrm{BQS}$ となり，相似比は$1:2$

よって， $\mathrm{EQ}=\mathrm{SQ}-\mathrm{SE}=2\mathrm{DP}-\mathrm{SE}=6-2\sqrt{3}-2=\underline{4-2\sqrt{3}}$