

問題Ⅰ 次の(1)～(3)の各問に答えよ。

(1) $\frac{1}{2\sqrt{3}-3}$ の整数部分を a ，小数部分を b とすると， $a = \boxed{\text{ア}}$ であり，

$$2b^2 + (a+2)b + a = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \text{である。}$$

(2) a を実数とする。2次関数 $y = -x^2 + (a+2)x + 1$ のグラフ C と x 軸との交点を A ， B とし， C の頂点を P とすると， $AB = \sqrt{a^2 + \boxed{\text{エ}}a + \boxed{\text{オ}}}$ であり， $\triangle ABP$ が正三角形のとき， $a = \boxed{\text{カキ}} \pm \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = 3a_n + 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすとする。
 $a_n = \boxed{\text{コ}}^n - \boxed{\text{サ}}$ であり， $a_n < 2024$ を満たす項の和は $\boxed{\text{シスセソ}}$ である。

問題 II 正四面体 ABCD の頂点から頂点へ次の<規則>に従って移動する点 P を考える。

<規則> k は自然数とする。

- ・時刻 0 のとき、点 P は点 A にある。
- ・時刻 k のとき、点 P は $\frac{2}{5}$ の確率で時刻 $k - 1$ のときにあった点に留まる。
- ・時刻 k のとき、点 P が時刻 $k - 1$ のときにあった点以外の 3 点のいずれかに移動する確率は等しい。

(1) 時刻 2 において点 P が点 A にある確率は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

(2) 時刻 2 において点 P が点 B にある確率は $\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(3) 時刻 3 において点 P が点 A にあるとき、時刻 2 において点 P が点 B にあった条件付き確率は $\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$ である。

問題 III $\triangle ABC$ において, $AB = AC = 7$, $BC = \sqrt{7}$ とする。

(1) $\cos \angle BAC = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(2) $\triangle ABC$ の面積は $\frac{\boxed{\text{オカ}} \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

以下, 辺 AC を $4 : 3$ に内分する点を P , 直線 BC と $\triangle ABP$ の外接円との交点のうち B と異なる点を Q , 線分 PQ と辺 AB の交点を R とする。

(3) $BQ = \boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}}$ であり, $\triangle BPQ$ の面積は $\frac{\boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(4) $\frac{RB}{AR} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であり, $\triangle APR$ の面積は $\boxed{\text{タ}} \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ である。

(5) 四角形 $AQBP$ の面積は $\frac{\boxed{\text{ツテ}} \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

問題 IV 1 から 100 までの整数からなる集合を全体集合 U とする。 U の要素のうち 50 と互いに素でないもの全体からなる集合を A 、 U の要素のうち偶数であるもの全体からなる集合を B 、 U の要素のうち 5 の倍数であるもの全体からなる集合を C とする。

- (1) U の要素 n が $B \cup C$ の要素であることは、 n が A の要素であるための ア。
 U の要素 n が $B \cap C$ の要素であることは、 n が A の要素であるための イ。

ア，イ に当てはまるものを次の①～③から 1 つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

- ① 必要条件であるが、十分条件ではない
- ① 十分条件であるが、必要条件ではない
- ② 必要十分条件である
- ③ 必要条件でも十分条件でもない

- (2) A の要素は全部で ウエ 個である。

- (3) U の部分集合 X と Y が次の 2 つの条件 (i)，(ii) を満たすとする。このとき、 X の要素は全部で オカ 個である。

(i) $X \cup \overline{Y} = A$

(ii) $X \cup Y = \overline{B}$

問題 V $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$, $g(x) = 3x^2 + 2x \int_0^2 g(t) dt + 2$ とする。座標平面上の2つの曲線 $C_1: y = f(x)$, $C_2: y = g(x)$ について考える。

(1) $\int_0^2 g(t) dt = k$ (k は実数) とおくと, $k = \boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) C_1 と C_2 の共有点の座標は ($\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エオ}}$) である。

(3) 曲線 C_1 上の点 $(t, 3t^2 + 2t - 8)$ における C_1 の接線の方程式は

$y = (\boxed{\text{カ}} t + \boxed{\text{キ}}) x - \boxed{\text{ク}} t^2 - \boxed{\text{ケ}}$ であり, これが C_2 にも接するとき,

この直線の方程式は $y = \boxed{\text{コ}} x - \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}}$ である。

(4) C_1 , C_2 の両方に接する直線を l とする。 C_1 , C_2 , l で囲まれた図形の面積を S とすると,

$S = \frac{\boxed{\text{ソタチ}}}{\boxed{\text{ツテト}}}$ である。

数学の問題はここまでです。

解答

問題 I

問題	(1)			(2)					
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
解答	2	8	3	4	8	—	2	2	2

問題	(3)					
	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
解答	3	1	1	0	8	6

$$(1) \frac{1}{2\sqrt{3}-3} = \frac{2\sqrt{3}+3}{(2\sqrt{3})^2-3^2} = \frac{2\sqrt{3}+3}{3} = \frac{\sqrt{12}+3}{3} = 2 \dots\dots \text{より, } a=2, \quad b = \frac{2\sqrt{3}+3}{3} - 2 = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

$$\text{よって, } 2b^2 + (a+2)b + a = 2b^2 + 4b + 2 = 2(b+1)^2 = 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$$

$$(2) -x^2 + (a+2)x + 1 = 0 \text{ のとき } x^2 - (a+2)x - 1 = 0 \text{ より, } x = \frac{(a+2) \pm \sqrt{a^2 + 4a + 8}}{2}$$

$$\text{よって, } AB = \sqrt{a^2 + 4a + 8}$$

$$\text{また, } y = -x^2 + (a+2)x + 1 = -\left(x - \frac{a+2}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + 4a + 8}{4} \text{ より, } \triangle ABP \text{ が正三角形のとき,}$$

$$\sqrt{a^2 + 4a + 8} : \frac{a^2 + 4a + 8}{4} = 2 : \sqrt{3} \text{ より, } \frac{a^2 + 4a + 8}{2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2 + 4a + 8}, \quad \sqrt{a^2 + 4a + 8} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{よって, } a^2 + 4a + 8 = 12, \quad a^2 + 4a - 4 = 0 \text{ より, } a = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$(3) a_{n+1} = 3a_n + 2 \text{ より, } a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$$

$$\text{よって, } a_n + 1 = (a_1 + 1) \cdot 3^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \text{ より, } a_n = 3^n - 1$$

$$\text{また, } a_n < 2024 \text{ のとき, } 3^n < 2025 \text{ であり, } 3^6 = 729, \quad 3^7 = 2187 \text{ より, } n = 1, 2, \dots, 6$$

$$\text{よって, 求める和は } \sum_{k=1}^6 a_k = \sum_{k=1}^6 (3^k - 1) = \frac{3(3^6 - 1)}{3 - 1} - 6 = \frac{3 \cdot 728}{2} - 6 = 1086$$

問題Ⅱ

問題	(1)			(2)		
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
解答	7	2	5	6	2	5

問題	(3)		
	キ	ク	ケ
解答	3	1	6

点 P が時刻 k において点 U にある事象を U_k で表し、時刻 $k-1$ から時刻 k にかけて点 U から点 V に移る事象を $(U_{k-1} \rightarrow V)$ のように表すことにする。また、事象 X が起きる確率を $P(X)$ のように表すことにする。規則により異なる点に移動する確率は $\left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$ である。

(1) 時刻 2 において点 P が点 A にあるのは、 $(A_0 \rightarrow A \rightarrow A)$ 、 $(A_0 \rightarrow B \rightarrow A)$ 、 $(A_0 \rightarrow C \rightarrow A)$ 、

$$(A_0 \rightarrow D \rightarrow A) \text{ の 4 通りあり、 } P(A_0 \rightarrow A \rightarrow A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}, \quad P(A_0 \rightarrow B \rightarrow A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25},$$

同様に $P(A_0 \rightarrow C \rightarrow A) = P(A_0 \rightarrow D \rightarrow A) = \frac{1}{25}$ であり、これらの和から $P(A_2) = \frac{7}{25}$ である。

(2) 時刻 2 において点 P が点 B にあるのは、 $(A_0 \rightarrow A \rightarrow B)$ 、 $(A_0 \rightarrow B \rightarrow B)$ 、 $(A_0 \rightarrow C \rightarrow B)$ 、

$$(A_0 \rightarrow D \rightarrow B) \text{ のときである。 } P(A_0 \rightarrow A \rightarrow B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}, \quad P(A_0 \rightarrow B \rightarrow B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{25},$$

$$P(A_0 \rightarrow C \rightarrow B) = P(A_0 \rightarrow D \rightarrow B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} \text{ であり、これらの和から } P(B_2) = \frac{6}{25} \text{ である。}$$

(3) 条件付き確率 $P_{A_3}(B_2) = \frac{P(A_3 \cap B_2)}{P(A_3)}$ を求める。

時刻 3 において点 P が点 A にあるのは、 $(A_2 \rightarrow A)$ 、 $(B_2 \rightarrow A)$ 、 $(C_2 \rightarrow A)$ 、 $(D_2 \rightarrow A)$ が起きるときであり、ここまでの経過から $P(C_2) = P(D_2) = \frac{6}{25}$ とわかる。

$$\text{よって、 } P(A_3) = P(A_2) \cdot \frac{2}{5} + P(B_2) \cdot \frac{1}{5} + P(C_2) \cdot \frac{1}{5} + P(D_2) \cdot \frac{1}{5} = \frac{32}{125} \text{ である。}$$

$$\text{また、 } A_3 \cap B_2 \text{ は } (B_2 \rightarrow A) \text{ が起きるときであり、 } P(A_3 \cap B_2) = P(B_2) \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{125} \text{ である。}$$

$$\text{以上より、 } P_{A_3}(B_2) = \frac{P(A_3 \cap B_2)}{P(A_3)} = \frac{\frac{6}{125}}{\frac{32}{125}} = \frac{3}{16} \text{ である。}$$

問題Ⅲ

問題	(1)				(2)			
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
解答	1	3	1	4	2	1	3	4

問題	(3)					(4)			
	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
解答	2	7	9	3	2	1	2	2	3

問題	(5)			
	ツ	テ	ト	ナ
解答	2	7	3	2

$$(1) \text{ 余弦定理より, } \cos \angle BAC = \frac{7^2 + 7^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{13}{14}$$

$$(2) \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{14} \text{ より, } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \sin \angle BAC = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

$$(3) \text{ 方べきの定理より, } CP \cdot CA = CB \cdot CQ \Leftrightarrow 3 \cdot 7 = \sqrt{7} CQ \Leftrightarrow CQ = 3\sqrt{7} \text{ であるから}$$

$$BQ = CQ - CB = 2\sqrt{7} \quad \text{また, } \triangle BPQ = \frac{CP}{CA} \cdot \frac{BQ}{BC} \cdot \triangle ABC = \frac{3}{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{21\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

<別解>

$\triangle BPQ$ の面積について $\angle ACB$ 共通, 円周角の定理より $\angle BAC = \angle CQP$ であるので,

$$\triangle ABC \sim \triangle QPC \quad \text{よって, } PQ = QC = 3\sqrt{7} \text{ より, } \triangle BPQ = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sin \angle BAC = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$(4) \triangle ABC \text{ と直線 } PQ \text{ においてメネラウスの定理より, } \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{RB}{AR} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって, } \triangle APR = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} \cdot \triangle ABC = 2\sqrt{3}$$

$$(5) \triangle ARQ = \frac{AR}{AB} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \triangle ABC = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{21\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3} \text{ より, 四角形 } AQBP \text{ の面積は,}$$

$$\triangle BPQ + \triangle APR + \triangle ARQ = \frac{9\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

<別解>

$$\text{四角形 } AQBP \text{ の面積は } \triangle AQC - \triangle PBC = \frac{CQ}{CB} \triangle ABC - \frac{CP}{CA} \triangle ABC = 3\triangle ABC - \frac{3}{7} \triangle ABC$$

$$= \frac{18}{7} \triangle ABC = \frac{18}{7} \cdot \frac{21\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

問題Ⅳ

問題	(1)		(2)		(3)	
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
解答	2	1	6	0	1	0

- (1) $50 = 2 \cdot 5^2$ であるから A の要素は 2 の倍数であるか、または 5 の倍数である。つまり、 A の要素であることと $B \cup C$ の要素であることは同値である。よって、 U の要素 n が $B \cup C$ の要素であることは、 n が A の要素であるための必要十分条件である。また、 $B \cap C$ に含まれる要素はすべて 2 と 5 の公倍数であるから $B \cap C \subset A$ を満たすが $B \cap C \supset A$ を満たさない。よって、 U の要素 n が $B \cap C$ の要素であることは、 n が A の要素であるための十分条件であるが、必要条件ではない。
- (2) U の要素のうち 2 の倍数であるものは 50 個であり、 5 の倍数であるものは 20 個であり、これらに共通するもの、すなわち 10 の倍数であるものは 10 個であるから、 A の要素は $50 + 20 - 10 = 60$ 個である。
- (3) ド・モルガンの法則を (i) に用いて $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y} = \bar{A}$ 、(ii) に用いて $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cap \bar{Y} = \bar{B}$ が得られる。 $(\bar{X} \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y}) = \bar{X}$ および $(\bar{X} \cap \bar{Y}) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y}) = \bar{A} \cup \bar{B}$ だから、 $\bar{X} = \bar{A} \cup \bar{B}$ である。よって、 $X = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B$ であるからこれは A の要素のうち偶数でないもの全体からなる集合を表している。よって、 X の要素は 100 以下の 5 の倍数のうち奇数であるものであり、 $5 \cdot (2k-1)$ (ただし、 k は 1 から 10 までの整数) と表せるから、 X の要素は 10 個である。

問題V

問題	(1)		(2)		
	ア	イ	ウ	エ	オ
解答	—	4	1	—	3

問題	(3)								
	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
解答	6	2	3	8	3	9	7	1	2

問題	(4)					
	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト
解答	1	2	5	1	0	8

(1) $\int_0^2 g(t) dt = k$ (k は実数) とおくと, $g(x) = 3x^2 + 2kx + 2$ となるので,

$$k = \int_0^2 (3t^2 + 2kt + 2) dt = \left[t^3 + kt^2 + 2t \right]_0^2 = 4k + 12 \text{ より, } k = -4$$

(2) $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$, $g(x) = 3x^2 - 8x + 2$ より, 交点の座標は

$$3x^2 + 2x - 8 = 3x^2 - 8x + 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ から, } (1, -3)$$

(3) $f'(x) = 6x + 2$ より, $(t, 3t^2 + 2t - 8)$ における C_1 の接線は

$$y = (6t + 2)(x - t) + 3t^2 + 2t - 8 = (6t + 2)x - 3t^2 - 8$$

また, $g'(x) = 6x - 8$ より, $(s, 3s^2 - 8s + 2)$ における C_2 の接線は

$$y = (6s - 8)(x - s) + 3s^2 - 8s + 2 = (6s - 8)x - 3s^2 + 2 \text{ となるので, 2 直線が一致するとき}$$

$$\begin{cases} 6t + 2 = 6s - 8 \\ -3t^2 - 8 = -3s^2 + 2 \end{cases} \text{ から } t = \frac{1}{6}, \quad s = \frac{11}{6}$$

よって, 共通接線の方程式は $y = 3x - \frac{97}{12}$

$$(4) \quad S = \int_{\frac{1}{6}}^1 \left\{ (3x^2 + 2x - 8) - \left(3x - \frac{97}{12} \right) \right\} dx + \int_1^{\frac{11}{6}} \left\{ (3x^2 - 8x + 2) - \left(3x - \frac{97}{12} \right) \right\} dx$$

$$= 3 \int_{\frac{1}{6}}^1 \left(x - \frac{1}{6} \right)^2 dx + 3 \int_1^{\frac{11}{6}} \left(x - \frac{11}{6} \right)^2 dx = 3 \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{6} \right)^3 \right]_{\frac{1}{6}}^1 + 3 \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{11}{6} \right)^3 \right]_1^{\frac{11}{6}} = \frac{125}{108}$$