問題 I 次の(1)～(3)の各問に答えよ。

(1) 方程式 $|3x+2| = -x$ の解は $x = \boxed{\text{アイ}}$, $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ であり,

不等式 $|4x-3| < -x+7$ の解は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}} < x < \boxed{\text{ケ}}$ である。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。関数 $f(\theta) = 2(\sin\theta + \cos\theta)^2 + 3(\sin\theta - \cos\theta)^2$ は

$f(\theta) = \boxed{\text{コ}} - \sin\boxed{\text{サ}}\,\theta$ と変形でき，最大値は $\boxed{\text{シ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ス}}$ である。

(3) r を実数とする。初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$S_3 = 14$，$S_6 = \dfrac{63}{4}$ のとき，$a = \boxed{\text{セ}}$，$r = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，$a_n < \dfrac{1}{100}$ を満たす最小の n は $n = \boxed{\text{チツ}}$ である。

問題 II 男子５人と女子３人が円形に並ぶ。

(1) 女子３人が隣り合う並び方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りである。

(2) 女子が隣り合わない並び方は $\boxed{\text{エオカキ}}$ 通りである。

(3) 女子のうち２人は隣り合うが３人は隣り合わない確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(4) 特定の男子 a と女子 b が隣り合うとき，女子が隣り合わない条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

問題 III 1辺の長さが2の正 n 面体を T_n とし，T_n の表面積を S_n，体積を V_n とする。

(1) $S_6 = \boxed{\text{アイ}}$，$S_4 = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) $V_8 = \dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3) $V_4 = \dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(4) 1辺の長さが2の正方形の外接円の半径は $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$，内接円の半径は $\boxed{\text{シ}}$ である。
また，T_8 の6個の頂点のうち，隣接しない2つの頂点を選ぶ。選んだ2つの頂点を通る直線を軸にして T_8 を1回転させるとき，T_8 の面が通過する部分の体積 V は

$$V = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{3}\pi$$ である。

問題 IV $f(x) = |x^2 - 6x|$とする。座標平面上の曲線C：$y = f(x)$について考える。

(1) 曲線$y = -x^2 + 6x$上の原点における接線をlとする。lの方程式は$y = \boxed{\text{ア}}\,x$であり，曲線Cと接線lの共有点の座標は（0，0）と（$\boxed{\text{イウ}}$，$\boxed{\text{エオ}}$）である。

(2) 曲線Cと(1)の接線lで囲まれた図形の面積は$\boxed{\text{カキク}}$である。

(3) kは$0 < k < \boxed{\text{ア}}$を満たす定数とする。曲線Cと直線m：$y = kx$の共有点のx座標は0，$\boxed{\text{ケ}} - k$，$\boxed{\text{ケ}} + k$である。

(4) 曲線Cと(3)の直線mで囲まれた2つの部分の面積の和をSとすると，

$$S = \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}k^3 + \boxed{\text{ス}}\,k^2 - \boxed{\text{セソ}}\,k + \boxed{\text{タチ}}$$

であるので，

Sは$k = \boxed{\text{ツテ}} - \boxed{\text{トナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$のとき最小になる。

数学の問題はここまでです。

解答

問題Ⅰ

問題	（1）								
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
解答	−	1	−	1	2	−	4	3	2

問題	（2）			
	コ	サ	シ	ス
解答	5	2	5	4

問題	（3）				
	セ	ソ	タ	チ	ツ
解答	8	1	2	1	1

（1） $|3x+2|=-x$ より， $3x+2=\pm(-x)$ ……①かつ $-x\geqq 0$ ……②

①より， $3x+2=-x$ または $3x+2=x$　　よって， $x=-\dfrac{1}{2}$， -1 （これらは②を満たす）

$|4x-3|<-x+7$ より，$-(-x+7)<4x-3<-x+7$　　よって，$-4<3x$ かつ $5x<10$ より，$-\dfrac{4}{3}<x<2$

（2） $f(\theta)=2(\sin\theta+\cos\theta)^2+3(\sin\theta-\cos\theta)^2=5(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2\sin\theta\cos\theta=5-\sin 2\theta$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき， $0\leqq 2\theta\leqq\pi$ より， $0\leqq\sin 2\theta\leqq 1$　　よって，最大値 $5-0=5$，最小値 $5-1=4$

（3） $S_3=a+ar+ar^2=14$ ……①， $S_6=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5=\dfrac{63}{4}$ ……②

②より， $(a+ar+ar^2)+r^3(a+ar+ar^2)=\dfrac{63}{4}$

①を代入して， $14+14r^3=\dfrac{63}{4}$， $14r^3=\dfrac{7}{4}$， $r^3=\dfrac{1}{8}$ より，r は実数だから， $r=\dfrac{1}{2}$

①に代入して， $\dfrac{7}{4}a=14$ より， $a=8$

$a_n=8\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\dfrac{1}{100}$ より， $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\dfrac{1}{1600}$， $2^n>1600$

よって， $2^{10}=1024$， $2^{11}=2048$ より，求める最小の n は $n=11$

問題Ⅱ

問題	（1）			（2）				（3）	
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
解答	7	2	0	1	4	4	0	4	7

問題	（4）	
	コ	サ
解答	2	5

（1）女子 3 人の並び方は$3!$通りあり，この 3 人の並ぶ場所を固定して考えるとき，男子の並び方は$5!$通りだから，求める並び方の数は$3!\cdot 5! = 720$通りである。

（2）男子の円順列は$4!$通りであり，女子は男子と男子の間 5 箇所から 3 箇所を選んで並ぶから，求める並び方の数は$4!\cdot {}_5\mathrm{P}_3 = 1440$通りである。

（3）8 人の円順列は$7!$通りであり，これらは同様に確からしい。題意の並び方について，まず隣り合う女子の並ぶ場所を固定して考える。このときの女子の並び方は${}_3\mathrm{P}_2$通りであり，男子の並び方は$5!$通りであり，残りの女子の並び方は 4 通りである。よって，求める確率は$\dfrac{{}_3\mathrm{P}_2\cdot 5!\cdot 4}{7!} = \dfrac{4}{7}$である。

（4）特定の男子 a と女子 b が隣り合う事象をA，女子が隣り合わない事象をBとして，条件付き確率$P_A(B)$を求める。Aは男子 a と女子 b が並ぶ場所を固定して考える。この 2 人の並び方 2 通りと他の 6 人の並び方$6!$通りから$P(A) = \dfrac{2\cdot 6!}{7!}$である。$A \cap B$は男子の円順列$4!$通り，女子 b が男子 a の隣に並ぶ並び方 2 通り，および他の女子の並び方${}_4\mathrm{P}_2$通りを考えて，$P(A\cap B) = \dfrac{4!\cdot 2\cdot {}_4\mathrm{P}_2}{7!}$である。よって，$P_A(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = \dfrac{\dfrac{4!\cdot 2\cdot 4\cdot 3}{7!}}{\dfrac{2\cdot 6!}{7!}} = \dfrac{2}{5}$である。

問題Ⅲ

問題	（1）				（2）		
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
解答	2	4	4	3	8	2	3

問題	（3）			（4）			
	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
解答	2	2	3	2	1	2	2

（1） $S_6 = 2\cdot 2\times 6 = 24$， $S_4 = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin 60^\circ \times 4 = 4\sqrt{3}$

（2） $V_8 = \dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\sqrt{2} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

（3）1辺の長さが2の正四面体OABCにおいて，ABCの重心をGとすると $\mathrm{AG} = \sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\mathrm{OG}\perp\mathrm{AG}$ より， $\mathrm{OG} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AG}^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

よって， $V_4 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin 60^\circ\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

（4）1辺の長さが2の正方形の外接円の半径は $\sqrt{2}$，内接円の半径は1であるから，

$V = \dfrac{1}{3}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\pi\cdot 2\sqrt{2} - \dfrac{1}{3}\cdot 1^2\cdot\pi\cdot 2\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

問題Ⅳ

問題	（1）					（2）			（3）
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
解答	6	1	2	7	2	2	1	6	6

問題	（4）							
	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
解答	―	1	6	9	1	8	3	6

問題	（4）				
	ツ	テ	ト	ナ	ニ
解答	1	8	1	2	2

（1） $y=-x^2+6x$　$y'=-2x+6$ より，$l: y=6x$

$f(x)=|x^2-6x|=\begin{cases} x^2-6x & (x \leqq 0,\ 6 \leqq x) \\ -x^2+6x & (0 \leqq x \leqq 6) \end{cases}$ より，曲線 C と直線 l の共有点は

$x \leqq 0,\ 6 \leqq x$ のとき，　$x^2-6x=6x \Leftrightarrow x=0,\ 12$

$0 \leqq x \leqq 6$ のとき，$-x^2+6x=6x \Leftrightarrow x=0$

より，$(0,\ 0),\ (12,\ 72)$

（2） $\int_0^6 \{6x-(-x^2+6x)\}dx+\int_6^{12}\{6x-(x^2-6x)\}dx=\int_0^6 x^2dx-\int_6^{12}(x^2-12x)dx=216$

（3） $x \leqq 0,\ 6 \leqq x$ のとき，　$x^2-6x=kx \Leftrightarrow x\{x-(k+6)\}=0,\ 6+k$ （$x \leqq 0,\ 6 \leqq x$ を満たす）

$0 \leqq x \leqq 6$ のとき，$-x^2+6x=kx \Leftrightarrow x\{x-(6-k)\}=0 \Leftrightarrow x=0,\ 6-k$ （$0 \leqq x \leqq 6$ を満たす）

より，曲線 C と直線 $m: y=kx$ の共有点の x 座標は $0,\ 6-k,\ 6+k$

（4） $S=\int_0^{6-k}\{(-x^2+6x)-kx\}dx+\int_{6-k}^{6}\{kx-(-x^2+6x)\}dx+\int_6^{6+k}\{kx-(x^2-6x)\}dx$

$=\dfrac{-1}{6}k^3+9k^2-18k+36$ となるので,

$S'=-\dfrac{1}{2}k^2+18k-18=-\dfrac{1}{2}(k^2-36k+36)$

$S'=0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}(k^2-36k+36)=0 \Leftrightarrow k=18\pm 12\sqrt{2}$ から $0<k<6$ における増減表は以下となる。

k	0	…	$18-12\sqrt{2}$	…	6
S'		−	0	＋	
S		↘		↗	

よって，S は $k=18-12\sqrt{2}$ のとき最小になる。