問題 I 次の4問から2問を選んで解答しなさい。

(1) a，b を有理数とする。
x の2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解の1つが $x = 1 - \sqrt{3}$ のとき，a，b の値を求めなさい。ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは用いてよい。

(2) $x^2 - xy - 2y^2 - 2x + 7y - 3$ を因数分解しなさい。

(3) a を実数とする。
2つの集合 $A = \{x \mid 2 < x < 4\}$，$B = \{x \mid a - 1 < x < a + 3\}$ について，
$A \subset B$ となるような a のとり得る値の範囲を求めなさい。

(4) 中心がO，半径が4である円の内部に点Pがあり，Pを通る直線と円との共有点をA，Bとする。PA・PB = 14 であるとき，線分OPの長さを求めなさい。

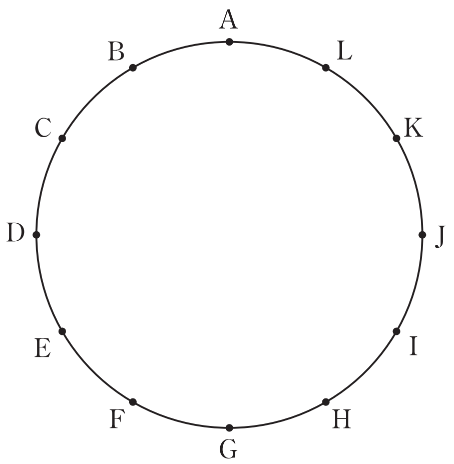
問題 II $f(x) = x^2 - 4x + 3$ とし，放物線 $y = f(x)$ を C とする。次の各問に答えなさい。

(1) C と x 軸の交点の座標を求めなさい。

(2) C を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めなさい。

(3) a は正の定数とする。$0 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値が 3，最小値が -1 となるような a のとり得る値の範囲を求めなさい。

問題 III 下図のように，半径1の円周上に円周を12等分にする点A～Lをこの順に左回り（反時計回り）になるようにとり，これらの点から3点を結んで三角形を作る。次の各問に答えなさい。



(1) 作られる三角形の総数を求めなさい。

(2) (1)のうち，直角三角形の個数を求めなさい。

(3) (1)のうち，二等辺三角形の個数を求めなさい。
ただし，正三角形も二等辺三角形に含むものとする。

(4) △AFGの面積を求めなさい。

(5) △FGHの面積を求めなさい。

問題 IV　O を原点とする座標平面上に 2 点 A $(3,0)$，B $(-3,0)$ があり，線分 AB を直径とする円を C とする。また，点 P は C 上の $y>0$ の部分にある点であり，直線 OP と x 軸の正の向きとのなす角を θ（$0<\theta<\pi$）とする。次の各問に答えなさい。

(1)　C の方程式を求めなさい。

(2)　△ OAP の面積が $\dfrac{9}{4}\sqrt{2}$ であるとき，θ を求めなさい。

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とする。O と直線 BP の距離を求めなさい。

(4)　線分 AP を 1 ： 2 に内分する点 Q は常にある円上にある。この円の中心の座標と半径を求めなさい。

(5)　AP + $\sqrt{3}$ BP の最大値を求めなさい。

問題 V 座標平面において放物線 $C : y = x^2 - \dfrac{5}{4}$ 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l とする。次の各問に答えなさい。

(1) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

(2) l と x 軸の正の向きとのなす角 θ ($0 < \theta < \pi$) を求めなさい。

(3) A を通り，l と直交する直線 m の方程式を求めなさい。

(4) y 軸上に中心をもち，A において l と接する円を D とする。1 つの座標平面上に C，l，m，D を描き，D の半径を求めなさい。

(5) 不等式 $y \leqq -\dfrac{1}{2}$ で表される領域内にあり，C と(4)の D で囲まれた図形の面積を求めなさい。

解答

問題 I

（1）無理数の計算，2次方程式の融合問題（数学 I ）

$x^2+ax+b=0$ に $x=1-\sqrt{3}$ を代入すると，$(1-\sqrt{3})^2+a(1-\sqrt{3})+b=-(a+2)\sqrt{3}+(a+b+4)=0$

a，b は有理数より $a+2$，$a+b+4$ はともに有理数であり，$\sqrt{3}$ は無理数であるから，

$a+2=0$ かつ $a+b+4=0$　　よって，$\underline{a=-2}$,$\underline{b=-2}$

（2）展開・因数分解（数学 I ）

$$x^2-xy-2y^2-2x+7y-3=x^2-(y+2)x-2y^2+7y-3=x^2-(y+2)x-(2y-1)(y-3)$$
$$=\{x-(2y-1)\}\{x+(y-3)\}=\underline{(x-2y+1)(x+y-3)}$$

（3）集合と命題（数学 I ）

$A\subset B$ となるのは $a-1\leqq 2$ かつ $4\leqq a+3$　　つまり，$\underline{1\leqq a\leqq 3}$

（4）図形の性質（数学A）

直線 OP と円との交点を C，D（PC＞PD）とすると，

$\mathrm{PC}=\mathrm{OC}+\mathrm{OP}=4+\mathrm{OP}$，$\mathrm{PD}=\mathrm{OD}-\mathrm{OP}=4-\mathrm{OP}$

方べきの定理より，$\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} \Leftrightarrow (4+\mathrm{OP})(4-\mathrm{OP})=14 \Leftrightarrow \mathrm{OP}^2=2$

よって，$\mathrm{OP}=\underline{\sqrt{2}}$

問題Ⅱ　　2次関数（数学Ⅰ）

（1）$f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ より，C と x 軸の交点の座標は $\underline{(1,0),(3,0)}$

（2）C を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式は

$y=(x-2)^2-4(x-2)+3-3=x^2-8x+12$　　よって，$\underline{y=x^2-8x+12}$

（3）$f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ より，C の頂点の座標は $(2,-1)$

$f(x)=x^2-4x+3=3 \iff x(x-4)=0$ より，$x=0, 4$

よって，最大値が 3，最小値が -1 となるような a のとり得る値は $\underline{2 \leqq a \leqq 4}$

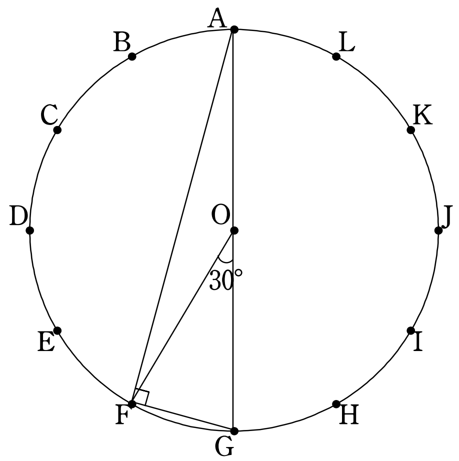
問題Ⅲ　図形と計量（数学Ⅰ），図形の性質（数学 A），場合の数（数学 A）の融合問題

（1）12 個の点から 3 点を選べばよいので，$_{12}C_3 = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{220}$ 個

（2）直角三角形となるのは円周角の定理より，直径を辺にもつときである。
AG を 1 辺とする直角三角形は，残る頂点を B～F，H～L の 10 個から選べばよいので 10 個ある。
これは BH，CI，DJ，EK，FL についても同様であり，これらの三角形の中に重複するものはないので，作られる直角三角形の個数は $10 \times 6 = \underline{60}$ 個

（3）A を頂角とする二等辺三角形のうち，正三角形でないものは△ABL，△ACK，△ADJ，△AFH の 4 個ある。B～L についても同様であり，これらの三角形の中に重複するものはないので，作られる（正三角形ではない）二等辺三角形の個数は $4 \times 12 = 48$ 個
また，正三角形は△AEI，△BFJ，△CGK，△DHL の 4 個あるので，求める二等辺三角形の総数は
$48 + 4 = \underline{52}$ 個

（4）円の中心を O とすると，下図のようになる。



円周を 12 等分するので $\angle FOG = 30^\circ$ となる。よって，△AFG の面積は

$$\triangle AFG = \triangle OAF + \triangle OFG = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = \underline{\frac{1}{2}}$$

（5）余弦定理より，$FG^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = 2 - \sqrt{3}$
$\angle FGH = 150^\circ$，$FG = GH$ であるから，

$$\triangle FGH = \frac{1}{2} \cdot FG \cdot GH \cdot \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot FG^2 \cdot \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$

問題Ⅳ　　図形と方程式，三角関数（数学Ⅱ）の融合問題

（1）C の中心は線分 AB の中点で O，半径は $\dfrac{\mathrm{AB}}{2}=3$ より，$x^2+y^2=9$

（2）$\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sin\theta=\dfrac{9}{2}\sin\theta=\dfrac{9}{4}\sqrt{2}$ より，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

（3）$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ であり，直線 BP の方程式は $y=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{2}-0}{\frac{3}{2}-(-3)}\{x-(-3)\}+0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}\ \Leftrightarrow\ x-\sqrt{3}y+3=0$

よって，直線 BP と O との距離は $\dfrac{|0-0+3|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\underline{\dfrac{3}{2}}$

【別解】

円周角と中心角の関係より $\angle\mathrm{OBP}=\dfrac{1}{2}\theta=\dfrac{\pi}{6}$ であるから，直線 BP と O との距離は $\mathrm{OB}\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}$

（4）$\mathrm{P}(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ であり，AP を $1:2$ に内分する点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(\dfrac{6+3\cos\theta}{1+2},\ \dfrac{3\sin\theta}{1+2}\right)$ より，

$\mathrm{Q}(\cos\theta+2,\ \sin\theta)$

$\begin{cases} x=\cos\theta+2 \\ y=\sin\theta \end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \sin\theta=y \\ \cos\theta=x-2 \end{cases}$ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ へ代入して，$(x-2)^2+y^2=1$

よって，$\underline{中心(2,\ 0),\ 半径1}$

（$0<\theta<\pi$ より，点 Q は中心$(2,\ 0)$，半径1 の円の $y>0$ の部分を動くことになる）

（5）$\angle\mathrm{ABP}=\dfrac{\theta}{2}$，$\angle\mathrm{BAP}=\dfrac{\pi-\theta}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$ であり，$\triangle\mathrm{ABP}$ に正弦定理を用いて，

$\dfrac{\mathrm{AP}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\mathrm{BP}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}=2\cdot 3$ より，$\mathrm{AP}=6\sin\dfrac{\theta}{2}$，$\mathrm{BP}=6\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)=6\cos\dfrac{\theta}{2}$

よって，$\mathrm{AP}+\sqrt{3}\mathrm{BP}=6\sin\dfrac{\theta}{2}+6\sqrt{3}\cos\dfrac{\theta}{2}=12\sin\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$0<\theta<\pi\ \Leftrightarrow\ \dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{6}\pi$ より，$\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ \theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，最大値 $\underline{12}$

問題V　微分法と積分法（数学Ⅱ）・2次関数（数学Ⅰ）・図形の性質（数学A）の融合問題

（1）$y=x^2-\dfrac{5}{4}$ と x 軸との交点の x 座標は $x^2-\dfrac{5}{4}=0$ の解より，$x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ である。

よって，求める面積は $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\left(-x^2+\frac{5}{4}\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{4}x\right]_{-\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\underline{\frac{5\sqrt{5}}{6}}$

（2）$y=x^2-\dfrac{5}{4}$ より $y'=2x$ であるから，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における接線の傾きは $\sqrt{3}$

$\tan\theta=\sqrt{3}$，$0<\theta<\pi$ であるから，$\underline{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$

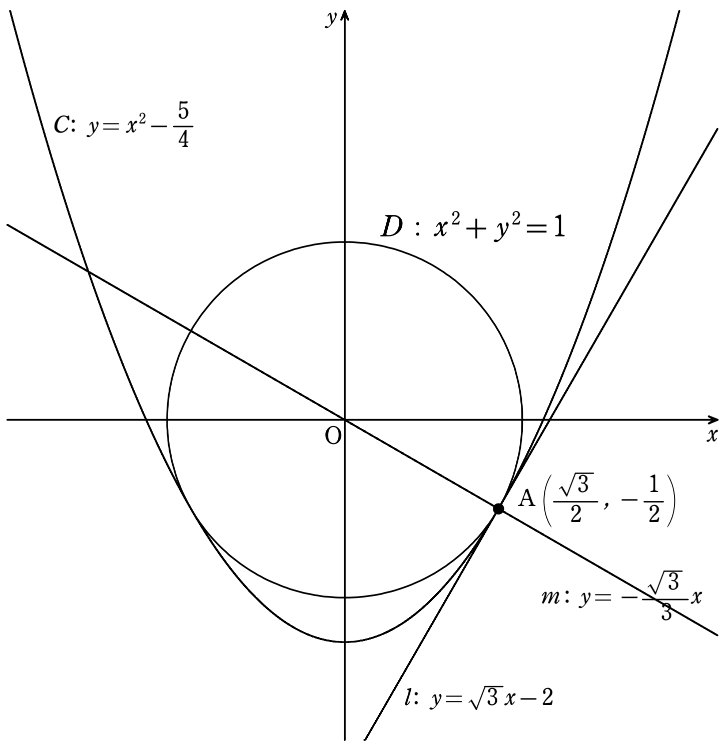
（3）l の傾きが $\sqrt{3}$ であるから m の傾きは $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

よって，直線 m の方程式は $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \underline{y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x}$

（4）l の方程式は $y=\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}x-2$

D は A において l と接するので中心は（3）で求めた $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 上にあり，D の中心は y 軸上にあるので中心の座標は $\mathrm{O}(0\ ,0)$ となる。よって，D の半径は $\mathrm{OA}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\underline{1}$

これを図示すると，



（５）図の対称性より $x \geqq 0$ で考える。C と線分 OA と y 軸で囲まれる部分の面積は

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x-x^2+\frac{5}{4}\right)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2+\frac{5}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{5\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

線分 OA と D と y 軸とで囲まれる扇形の面積は $\pi\times1^2\times\dfrac{60°}{360°}=\dfrac{\pi}{6}$

よって，求める図形の面積は $2\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\underline{\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\pi}{3}}$