問題 I 次の(1)～(4)の各問に答えよ。

(1) $x = \dfrac{12}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$，$y = \dfrac{12}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ のとき，$x + y = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$，

$\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y} = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 放物線 $y = -2x^2 - 4x + 5$ の頂点の座標は（$\boxed{\text{エオ}}$，$\boxed{\text{カ}}$）である。

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を x 軸に関して対称移動して，さらに x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動したら放物線 $y = -2x^2 - 4x + 5$ に重なった。このとき，

$a = \boxed{\text{キ}}$，$b = \boxed{\text{ク}}$，$c = \boxed{\text{ケコ}}$ である。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

和 S_n が $S_n = n^3 + 6n^2 + 11n - 2$ を満たすとき，初項 $a_1 = \boxed{\text{サシ}}$ であり，

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = \boxed{\text{ス}}\,n^2 + \boxed{\text{セ}}\,n + \boxed{\text{ソ}}$ である。

(4) i を虚数単位とする。

$(1 - 2i)(9 + i) + \dfrac{10(8 + 3i)}{3 + i} = \boxed{\text{タチ}} - \boxed{\text{ツテ}}\,i$ である。

問題 II Aの袋には赤玉が1個と白玉が2個，Bの袋には赤玉が2個と白玉が3個入っている。

(1) 1個のさいころを投げて1，2の目が出たらAの袋を選び，3〜6の目が出たらBの袋を選ぶ。選んだ袋から玉を1個取り出すとき，Aの袋を選び，袋から白玉が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) Aの袋から玉を1個取り出し，それをBの袋に入れた後，Bの袋から玉を1個取り出す。このとき，Bの袋から取り出された玉が白玉である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(3) A，Bの袋それぞれから同時に玉を1個ずつ取り出し，Aの袋から取り出された玉をBの袋に入れ，Bの袋から取り出された玉をAの袋に入れる試行を考える。この試行を2回繰り返した後に，Aの袋には赤玉が1個と白玉が2個，Bの袋には赤玉が2個と白玉が3個入っている確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

問題 III OA = OB = OC = AB = 2，BC = CA = 3 である四面体 OABC がある。

(1) $\cos\angle ACB = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であり，△ ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$ である。

(2) AB の中点を M とし，△ AMC の外接円と辺 BC の交点を N とする。

△ AMC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ であり，$CN = \dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

(3) 点 O から平面 ABC に下ろした垂線を OH とする。

3 つの直角三角形△ OHA，△ OHB，△ OHC に着目すると，$OH = \dfrac{\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{シ}}$ である。

また，四面体 OABC の体積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{スセ}}}{\boxed{ソ}}$ である。

(4) 辺 AC 上に点 P をとり，点 P から辺 BC に下ろした垂線を PQ とする。

平面 OPQ により四面体 OABC の体積が 2 等分されるのは $CP = \dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チツ}}}{\boxed{テト}}$ のときである。

問題 IV a を実数とする。すべての実数からなる集合を全体集合とし，その部分集合 A，B，C を，

$A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 > 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - (2a + 6)x + a^2 + 6a < 0\}$，

$C = \{x \mid (x - a)(x - a^2 + 6) < 0\}$ とする。

(1) $a = 2$ のとき，集合 $A \cap B$ に含まれる要素のうち異なる整数の個数は $\boxed{ア}$ 個であり，集合 $B \cup C$ に含まれる要素のうち異なる整数の個数は $\boxed{イ}$ 個である。

(2) $x \in \overline{A}$ であることが $x \in B$ であるための十分条件であるような a のとり得る値の範囲は $\boxed{ウ}$ である。ただし，$\overline{A}$ は A の補集合を表す。

$\boxed{ウ}$ に当てはまるものを次の⓪〜⑦から 1 つ選べ。ただし，$p = \boxed{エオ}$，$q = \boxed{カキ}$ である。

⓪ $a < p$ または $q < a$　① $a \leqq p$ または $q < a$　② $a < p$ または $q \leqq a$
③ $a \leqq p$ または $q \leqq a$　④ $p < a < q$　⑤ $p \leqq a < q$
⑥ $p < a \leqq q$　⑦ $p \leqq a \leqq q$

(3) 集合 $B \cap C$ が空集合であるための a の必要十分条件は $\boxed{ク}$ である。

$\boxed{ク}$ に当てはまるものを次の⓪〜⑦から 1 つ選べ。ただし，$p = \boxed{ケコ}$，$q = \boxed{サ}$ である。

⓪ $a < p$ または $q < a$　① $a \leqq p$ または $q < a$　② $a < p$ または $q \leqq a$
③ $a \leqq p$ または $q \leqq a$　④ $p < a < q$　⑤ $p \leqq a < q$
⑥ $p < a \leqq q$　⑦ $p \leqq a \leqq q$

問題 V 関数 $f(x)=x^3+6x^2+3x+4$ は $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるとする。

2点（α，$f(\alpha)$），（β，$f(\beta)$）を通る直線を $y=mx+n$ とする。

(1) $f(x)$ を x^2+4x+1 で割った余りは $\boxed{\text{アイ}}\,x+\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $f(\alpha)=\boxed{\text{エオ}}+\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3) $m=\boxed{\text{クケ}}$，$n=\boxed{\text{コ}}$ である。

(4) $f(x)-(mx+n)=(x+\boxed{\text{サ}})^3-\boxed{\text{シ}}(x+\boxed{\text{サ}})$ と変形できるので，

$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-(mx+n)|\,dx=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

必要ならば，$\displaystyle\int(x+a)^k\,dx=\frac{1}{k+1}(x+a)^{k+1}+C$（$k$ は自然数，C は積分定数）を用いてもよい。

数学の問題はここまでです。

解答

問題Ⅰ

問題	（1）			（2）						
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
解答	6	7	5	−	1	7	2	8	−	1

問題	（3）					（4）			
	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ
解答	1	6	3	9	6	3	8	1	6

（1） $x=\dfrac{12}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{12(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3}=3(\sqrt{7}+\sqrt{3})$, $y=\dfrac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{12(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3}=3(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ なので，

$x+y=3(\sqrt{7}+\sqrt{3})+3(\sqrt{7}-\sqrt{3})=6\sqrt{7}$, $xy=3(\sqrt{7}+\sqrt{3})\cdot 3(\sqrt{7}-\sqrt{3})=36$

$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\dfrac{(6\sqrt{7})^2-2\cdot 36}{36}=5$

（2） $y=-2x^2-4x+5=-2(x+1)^2+7$ より，頂点の座標は $(-1,\ 7)$

条件から， $y=-2x^2-4x+5$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動して，さらに x 軸に関して対称移動すると $y=ax^2+bx+c$ になるので， $y=ax^2+bx+c$ の頂点は $(-2,\ -9)$，グラフは下に凸なので， $y=ax^2+bx+c=2(x+2)^2-9=2x^2+8x-1$ 　したがって， $a=2,\ b=8,\ c=-1$

（3） $a_1=S_1=1+6+11-2=16$

$n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}=(n^3+6n^2+11n-2)-\{(n-1)^3+6(n-1)^2+11(n-1)-2\}=3n^2+9n+6$

（4） $(1-2i)(9+i)+\dfrac{10(8+3i)}{3+i}=(1-2i)(9+i)+\dfrac{10(8+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$

$=(1-2i)(9+i)+(8+3i)(3-i)=(11-17i)+(27+i)=38-16i$

問題Ⅱ

問題	（1）		（2）			
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
解答	2	9	1	1	1	8

問題	（3）			
	キ	ク	ケ	コ
解答	4	1	7	5

（1）A の袋から白玉が取り出される確率は$\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

（2）A の袋から赤玉が取り出され，B の袋から白玉が取り出される確率は$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{18}$

A の袋から白玉が取り出され，B の袋から白玉が取り出される確率は$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{6}=\frac{8}{18}$

よって，求める確率は$\frac{3}{18}+\frac{8}{18}=\frac{11}{18}$

（3）1 回目の試行でともに赤玉を，2 回目の試行でもともに赤玉を取り出す確率は$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{225}$

1 回目の試行でともに白玉を，2 回目の試行でもともに白玉を取り出す確率は$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\right)^2=\frac{36}{225}$

1 回目の試行でともに赤玉を，2 回目の試行でともに白玉を取り出す確率は$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{225}$

1 回目の試行でともに白玉を，2 回目の試行でともに赤玉を取り出す確率は$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{12}{225}$

（ここまでは，A，B から同じ色の玉を取り出す確率として$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\right)^2=\frac{64}{225}$として求めることもできる。）

1 回目の試行で A から赤玉，B から白玉を取り出し，2 回目の試行で A から白玉，B から赤玉を取り出す確率は$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\times\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{27}{225}$

1 回目の試行で A から白玉，B から赤玉を取り出し，2 回目の試行で A から赤玉，B から白玉を取り出す確率は$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{32}{225}$

よって，求める確率は$\frac{4+36+12+12+27+32}{225}=\frac{123}{225}=\frac{41}{75}$

問題Ⅲ

問題	（1）					（2）			
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
解答	7	9	9	2	8	3	2	7	3

問題	（3）					
	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
解答	9	4	8	4	7	6

問題	（4）				
	タ	チ	ツ	テ	ト
解答	9	1	4	1	4

（1）△ABC に余弦定理を用いて， $\cos\angle ACB = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC\cdot BC} = \dfrac{9+9-4}{2\cdot 3\cdot 3} = \dfrac{7}{9}$

$\sin\angle ACB > 0$ より， $\sin\angle ACB = \sqrt{1-\cos^2\angle ACB} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理を用いて， $2R = \dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$

$\therefore\ R = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot \dfrac{1}{\sin\angle ACB} = \dfrac{9}{4\sqrt{2}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{8}$

（2）$AC = BC$ より， $\angle AMC = 90^\circ$ だから，線分 AC は△AMC の外接円の直径であり，この円の半径は $\dfrac{1}{2}AC = \dfrac{3}{2}$ である。方べきの定理より $BN\cdot BC = BM\cdot BA$ $\quad\therefore\ BN\cdot 3 = 1\cdot 2 \Leftrightarrow BN = \dfrac{2}{3}$

$CN = BC - BN = 3 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{3}$

（3）△OHA，△OHB，△OHC は合同だから， $AH = BH = CH$ であり，H は△ABC の外心である。

$\therefore\ AH = R$ であり，△OHA に三平方の定理を用いて $OH = \sqrt{OA^2 - R^2} = \sqrt{4 - \dfrac{81}{32}} = \dfrac{\sqrt{94}}{8}$

四面体 OABC の体積は $\dfrac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot CA\cdot CB\sin\angle ACB\cdot\dfrac{\sqrt{94}}{8} = \dfrac{\sqrt{47}}{6}$

（4）$CP = sCA\ (0 < s < 1)$ とおくと， $CQ = CP\cos\angle ACB = \dfrac{7}{9}sCA = \dfrac{7}{9}sCB$ である。

$\triangle CPQ = \dfrac{1}{2}\triangle CAB$ のとき四面体 OCPQ の体積が四面体 OABC の体積の $\dfrac{1}{2}$ となり適する。

$\triangle CPQ = s\cdot\dfrac{7}{9}s\triangle CAB$ であるから， $\dfrac{7}{9}s^2 = \dfrac{1}{2}$ かつ $s > 0$ $\quad\therefore\ s = \dfrac{3}{\sqrt{14}}$ より， $CP = \dfrac{3}{\sqrt{14}}\cdot 3 = \dfrac{9\sqrt{14}}{14}$

問題Ⅳ

問題	（1）		（2）				
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
解答	4	8	4	―	3	―	1

問題	（3）			
	ク	ケ	コ	サ
解答	7	―	2	3

$A=\{x\mid x<-1,\ 3<x\}$ である。

（1） $a=2$ のとき，$B=\{x\mid x^2-10x+16<0\}$ であり，$x^2-10x+16=(x-2)(x-8)$ より $B=\{x\mid 2<x<8\}$ である。よって，$A\cap B=\{x\mid 3<x<8\}$ であるからこの集合に含まれる異なる整数は 4，5，6，7 の 4 個である。

$a=2$ のとき，$C=\{x\mid (x-2)(x+2)<0\}$ より $C=\{x\mid -2<x<2\}$ である。よって，$B\cup C=\{x\mid -2<x<2,\ 2<x<8\}$ であるから，この集合に含まれる異なる整数は -1，0，1，3，4，5，6，7 の 8 個である。

（2） $\overline{A}=\{x\mid -1\leqq x\leqq 3\}$

$x^2-(2a+6)x+a^2+6a=(x-a)(x-a-6)$ より，$B=\{x\mid a<x<a+6\}$

求める条件は $\overline{A}\subset B$ が成り立つ条件だから，$a<-1$ かつ $3<a+6$ より，$-3<a<-1$

（3） $x^2-(2a+6)x+a^2+6a=(x-a)(x-a-6)$ より，$B=\{x\mid a<x<a+6\}$

$a<a^2-6 \Leftrightarrow (a+2)(a-3)>0 \Leftrightarrow a<-2,\ 3<a$ のとき，$C=\{x\mid a<x<a^2-6\}$

よって，$B\cap C=\varnothing$ は成り立たない。

$a=a^2-6 \Leftrightarrow (a+2)(a-3)=0 \Leftrightarrow a=-2,\ 3$ のとき，$C=\varnothing$ より，$B\cap C=\varnothing$ が成り立つ。

$a>a^2-6 \Leftrightarrow (a+2)(a-3)<0 \Leftrightarrow -2<a<3$ のとき，$C=\{x\mid a^2-6<x<a\}$ より $B\cap C=\varnothing$ が成り立つ。よって求める必要十分条件は，$-2\leqq a\leqq 3$ である。

問題Ⅴ

問題	（１）			（２）			
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
解答	−	6	2	1	4	6	3

問題	（３）			（４）			
	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
解答	−	6	2	2	3	9	2

（１） $f(x)$ を x^2+4x+1 で割ると，商が $x+2$，余りが $-6x+2$ である。

（２） $f'(x)=3x^2+12x+3=3(x^2+4x+1)$ より， $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{3}$

よって， $\alpha=-2-\sqrt{3}$ である。

また，（１） より， $f(x)=(x^2+4x+1)(x+2)-6x+2$

よって， $x=\alpha$ のとき $x^2+4x+1=0$ だから， $f(\alpha)=-6\alpha+2=-6(-2-\sqrt{3})+2=14+6\sqrt{3}$

（３）（２） より， $f(\alpha)=-6\alpha+2$　同様にして， $f(\beta)=-6\beta+2$

よって，2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ は直線 $y=-6x+2$ 上にあるから， $m=-6$， $n=2$

（４） $f(x)-(mx+n)=(x^2+4x+1)(x+2)-6x+2-(-6x+2)=(x^2+4x+1)(x+2)$ より，

$y=f(x)$ と $y=mx+n$ の共有点の x 座標は $\alpha=-2-\sqrt{3}$， -2， $\beta=-2+\sqrt{3}$ である。

また， $f(x)-(mx+n)=(x^2+4x+1)(x+2)=\{(x+2)^2-3\}(x+2)=(x+2)^3-3(x+2)$

よって， $\displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x)-(mx+n)|dx=\int_\alpha^{-2}\{f(x)-(mx+n)\}dx-\int_{-2}^\beta\{f(x)-(mx+n)\}dx$

$$=\left[\frac{1}{4}(x+2)^4-\frac{3}{2}(x+2)^2\right]_\alpha^{-2}-\left[\frac{1}{4}(x+2)^4-\frac{3}{2}(x+2)^2\right]_{-2}^\beta$$

$$=-\left\{\frac{1}{4}(-\sqrt{3})^4-\frac{3}{2}(-\sqrt{3})^2\right\}-\left\{\frac{1}{4}(\sqrt{3})^4-\frac{3}{2}(\sqrt{3})^2\right\}=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$