問題 I 次の(1)〜(4)の各問に答えよ。

(1) 循環小数 $x = 0.131313\cdots = 0.\dot{1}\dot{3}$ を分数で表すと，$x = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ であり，$\dfrac{11}{111}x$ を小数で表したとき，小数第 100 位の数は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\cos\theta - \sin\theta = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$，

$\cos\theta + \sin\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$\cos 2\theta = \dfrac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(3) 等差数列 $\{a_n\}$ が $a_2 = 8$，$a_6 = 16$ を満たすとき，この一般項は $a_n = \boxed{\text{チ}}\,n + \boxed{\text{ツ}}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = \boxed{\text{テ}}\,n^2 + \boxed{\text{ト}}\,n$ である。

(4) i を虚数単位とする。$x = 0$ は方程式 $x^4 - 7x^3 - 6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解ではないので，$t = x + \dfrac{1}{x}$ とすると，$x^4 - 7x^3 - 6x^2 - 7x + 1 = 0$ は $t^2 - \boxed{\text{ナ}}\,t - \boxed{\text{ニ}} = 0$ と表せる。これを用いると，方程式 $x^4 - 7x^3 - 6x^2 - 7x + 1 = 0$ の解は

$x = \dfrac{\boxed{\text{ヌネ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}\,i}{\boxed{\text{ハ}}}$，$\boxed{\text{ヒ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{フヘ}}}$ である。

問題 II SAKURA の 6 文字を全部使ってできる文字列を考える。

(1) できる文字列は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りである。

(2) U がどの A よりも右にある文字列は $\boxed{\text{エオカ}}$ 通りである。

(3) 両端が母音（A または U）である文字列は $\boxed{\text{キク}}$ 通りである。

(4) AAKRSU を 1 番目として辞書式に並べるとき，SAKURA は $\boxed{\text{ケコサ}}$ 番目の文字列である。

問題 III 長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，頂点を O とする直円錐（すい）がある。母線の長さは 6 である。また，線分 AB の中点を H とする。

(1) 直円錐の表面積は $\boxed{\text{ア}}\ \pi$ である。

(2) 直円錐に内接する球の表面積は $\dfrac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\ \pi$ である。

(3) 直円錐の側面上を動く動点 P が，点 A を出発して母線 OB と 1 点で交わり，母線 OA の中点 M に到達するとき，P が通る経路の最短距離は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(4) 線分 OH 上の点 I を通り底面と平行な平面を α とする。α と直円錐の側面が交わってできる円周上に 3 点 C，D，E をとり，四面体 HCDE をつくる。これが正四面体であるとき，

$$\mathrm{OI} = \frac{\boxed{\text{キク}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}} - \sqrt{\boxed{\text{サ}}}\right)}{\boxed{\text{シス}}}$$ である。

問題 IV 座標平面上に曲線 C ：$y = 2x^2$ がある。C 上の 2 点 A $(\alpha,\ 2\alpha^2)$，B $(\beta,\ 2\beta^2)$ $(\alpha < \beta)$ における接線をそれぞれ l，m とし，l，m の交点の x 座標を t とする。

(1) $\alpha = -2$，$\beta = 4$ のとき，$t =$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $\alpha = -2$，$\beta = 4$ のとき，曲線 C と 2 直線 l，m で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{イウ}}$ である。

(3) P $(s,\ 2s^2)$ $(\alpha < s < \beta)$ とする。
$\alpha = -4$，$\beta = 2$ のとき，△ABP の面積は $s =$ $\boxed{\text{エオ}}$ のとき最大になる。

(4) 直線 $x = t$ と曲線 C の交点を Q とする。
曲線 C と直線 AB で囲まれた図形の面積を S_1，△ABQ の面積を S_2 とすると，
$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

数学の問題はここまでです。

解答

問題 I

問題	（1）					（2）		
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
解答	1	3	9	9	0	7	3	2

問題	（2）							
	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
解答	2	3	4	3	2	3	1	6

問題	（3）			
	チ	ツ	テ	ト
解答	2	4	3	7

問題	（4）								
	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ
解答	7	8	−	1	3	2	4	1	5

（1） $x = 0.131313\cdots$ より， $100x = 13.1313\cdots$ なので， $99x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{99}$

$\frac{11}{111}x = \frac{13}{99}\cdot\frac{11}{111} = \frac{13}{999} = 0.013013\cdots$ と周期 3 で繰り返されるので，小数第 100 位は 0

（2） $(\cos\theta - \sin\theta)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{7}{32}$

$(\cos\theta + \sin\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 2\cdot\frac{7}{32} = \frac{23}{16}$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ から， $\cos\theta + \sin\theta > 0$ であるので， $\cos\theta + \sin\theta = \frac{\sqrt{23}}{4}$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = \frac{\sqrt{23}}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{23}}{16}$

（3）初項を a，公差を d とすると， $a_2 = 8 \Leftrightarrow a + d = 8$, $a_6 = 16 \Leftrightarrow a + 5d = 16$

これを解くと， $a = 6$, $d = 2$ なので， $a_n = 6 + 2(n-1) = 2n + 4$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = \sum_{k=1}^{n}(6k+4) = 6\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 4n = 3n^2 + 7n$$

（４） $x=0$ は方程式 $x^4-7x^3-6x^2-7x+1=0$ の解ではないので両辺を x^2 で割ると，

$x^2-7x-6-\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-6=0 \Leftrightarrow t^2-7t-8=0$ となる。

$t^2-7t-8=0 \Leftrightarrow (t+1)(t-8)=0 \Leftrightarrow t=-1,\ 8$

$t=-1$ のとき， $x+\dfrac{1}{x}=-1$ なので， $x^2+x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$t=8$ のとき， $x+\dfrac{1}{x}=8$ なので， $x^2-8x+1=0 \Leftrightarrow x=4\pm\sqrt{15}$

問題Ⅱ

問題	（1）			（2）			（3）	
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
解答	3	6	0	1	2	0	7	2

問題	（4）		
	ケ	コ	サ
解答	2	5	2

（1）SAKURA の 6 文字を全部使ってできる文字列は$\dfrac{6!}{2!}=360$通り

（2）U と A を同じ文字として順列を考えて$\dfrac{6!}{3!}=120$通り

（3）両端が U と A の文字列は両端の並べ替えが$2!=2$通り，両端以外の並べ替えが$4!=24$通りあるので，$2\cdot 24=48$通り

両端がともに A の文字列は両端が 1 通り，両端以外の並べ替えが$4!=24$通りあるので，$1\cdot 24=24$通り　よって，$48+24=72$通り

（4）A●●●●●の形の文字列は$5!=120$通り，K●●●●●の形の文字列は$\dfrac{5!}{2!}=60$通り

R●●●●●の形の文字列は$\dfrac{5!}{2!}=60$通り，SAA●●●の形の文字列は$3!=6$通り

SAKA●●の形の文字列は$2!=2$通り，SAKR●●の形の文字列は$2!=2$通り

辞書式では，その後 SAKUAR，SAKURA と続くので，SAKURA は$120+60\cdot 2+6+2\cdot 2+2=252$番目の文字列である。

問題Ⅲ

問題	（1）	（2）			（3）	
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
解答	7	2	0	7	3	3

問題	（4）						
	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
解答	3	5	3	5	2	3	3

（1）側面の展開図を扇形OAA′とする。$\angle \mathrm{AOA'} = \frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$ だから，

側面積は $\frac{1}{6} \cdot 6^2\pi = 6\pi$，底面積は $1^2\pi = \pi$ である。　　よって，直円錐の表面積は 7π である。

（2）内接する球の半径を r とする。これは△OAB の内接円の半径に等しい。また，$\mathrm{OH} \perp \mathrm{AH}$ だから，三平方の定理を用いて，$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{35}$ であり，△OAB の面積から

$\frac{1}{2} \cdot r \cdot (6+6+2) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{35}$　　$\therefore\ r = \frac{\sqrt{35}}{7} = \sqrt{\frac{5}{7}}$ である。

よって，直円錐に内接する球の表面積は $4\pi r^2 = \frac{20}{7}\pi$ である。

（3）扇形OAA′で点 M を線分OA′の中点とする。動点 P の通る最短の経路は扇形OAA′上の線分 AM であり，$\angle \mathrm{AOM} = 60^\circ$ であるから，△AOM に余弦定理を用いて，

$\mathrm{AM}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OM}^2 - 2\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OM}\cos 60^\circ = 27$　　よって，$\mathrm{AM} = 3\sqrt{3}$ より求める最小値は $3\sqrt{3}$

（4）$\mathrm{OI} = h$，$\mathrm{CI} = \mathrm{DI} = \mathrm{EI} = r'$ とする。$\mathrm{OI} : \mathrm{CI} = \mathrm{OH} : \mathrm{AH}$ および，$\mathrm{OH} = \sqrt{35}$，$\mathrm{AH} = 1$ より，

$h : r' = \sqrt{35} : 1$　　$\therefore\ h = \sqrt{35}r'$ である。正四面体 HCDE ができるとき，△CDE は正三角形だから，

$\angle \mathrm{CID} = 120^\circ$　　$\therefore\ \mathrm{CD} = 2r'\sin 60^\circ = \sqrt{3}r'$ である。

また，$\mathrm{HI} = \sqrt{\mathrm{CH}^2 - \mathrm{CI}^2} = \sqrt{\mathrm{CD}^2 - r'^2} = \sqrt{2}r'$ である。$\mathrm{OH} = \mathrm{OI} + \mathrm{IH} = h + \sqrt{2}r' = (\sqrt{35} + \sqrt{2})r' = \sqrt{35}$ より，$r' = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{35} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{35}(\sqrt{35} - \sqrt{2})}{33}$ であるから，$\mathrm{OI} = h = \sqrt{35}r' = \frac{35(\sqrt{35} - \sqrt{2})}{33}$

問題Ⅳ

問題	（1）	（2）		（3）		（4）	
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
解答	1	3	6	－	1	4	3

（1） $y=2x^2$ より， $y'=4x$ 　よって，l の方程式は， $y=4\alpha(x-\alpha)+2\alpha^2=4\alpha x-2\alpha^2$ ……①

同様にして，m の方程式は， $y=4\beta x-2\beta^2$ ……②

①，②より， $4\alpha x-2\alpha^2=4\beta x-2\beta^2 \Leftrightarrow 4(\alpha-\beta)x=2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ 　よって， $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

したがって， $\alpha=-2$， $\beta=4$ のとき， $t=\dfrac{-2+4}{2}=1$

（2） $\alpha=-2$， $\beta=4$ のとき， $l: y=-8x-8$， $m: y=16x-32$

よって，求める面積は， $\int_{-2}^{1}\{2x^2-(-8x-8)\}dx+\int_{1}^{4}\{2x^2-(16x-32)\}dx=18+18=36$

（3）線分 AB を底辺とみると，AB // （P での C の接線）のとき，高さが最大で△ABP の面積は最大になる。　よって，（AB の傾き） $=\dfrac{2\cdot 2^2-2\cdot(-4)^2}{2-(-4)}=-4$， $y'=4x$ より， $4s=-4 \Leftrightarrow s=-1$

（4）直線 AB： $y=\dfrac{2\alpha^2-2\beta^2}{\alpha-\beta}(x-\alpha)+2\alpha^2=2(\alpha+\beta)x-2\alpha\beta$ より，

$S_1=\int_{\alpha}^{\beta}\{2(\alpha+\beta)x-2\alpha\beta-2x^2\}dx=-2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$

$t=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ より，点 Q の y 座標は $2t^2=2\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2}$

直線 $x=t$ と直線 AB の交点を R とすると，点 R は線分 AB の中点だから，$\mathrm{R}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{2\alpha^2+2\beta^2}{2}\right)$

よって，$\mathrm{QR}=\dfrac{2\alpha^2+2\beta^2}{2}-\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2}=\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2}$ より， $S_2=\dfrac{1}{2}\cdot(\beta-\alpha)\cdot\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2}=\dfrac{1}{4}(\beta-\alpha)^3$

したがって， $S_1:S_2=\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3:\dfrac{1}{4}(\beta-\alpha)^3=4:3$ より， $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{4}{3}$