

問題Ⅰ 次の4問から2問を選んで解答しなさい。

- (1) a, b を有理数とする。

x の2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解の1つが $x = 1 - \sqrt{3}$ のとき, a, b の値を求めなさい。ただし, $\sqrt{3}$ が無理数であることは用いてよい。

- (2) $x^2 - xy - 2y^2 - 2x + 7y - 3$ を因数分解しなさい。

- (3) a を実数とする。

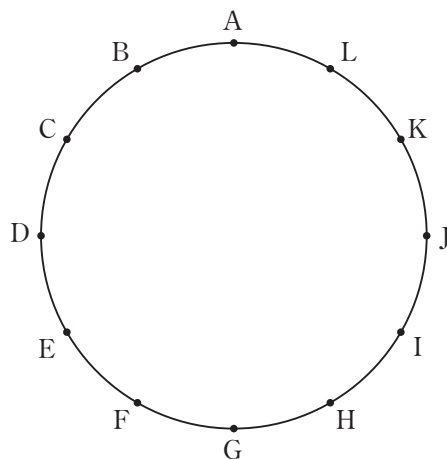
2つの集合 $A = \{x \mid 2 < x < 4\}$, $B = \{x \mid a - 1 < x < a + 3\}$ について,
 $A \subset B$ となるような a のとり得る値の範囲を求めなさい。

- (4) 中心が O , 半径が4である円の内部に点 P があり, P を通る直線と円との共有点を A, B とする。 $PA \cdot PB = 14$ であるとき, 線分 OP の長さを求めなさい。

問題Ⅱ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ とし、放物線 $y = f(x)$ を C とする。次の各問に答えなさい。

- (1) C と x 軸の交点の座標を求めなさい。
- (2) C を x 軸方向に 2, y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めなさい。
- (3) a は正の定数とする。 $0 \leq x \leq a$ における $f(x)$ の最大値が 3, 最小値が -1 となるような a のとり得る値の範囲を求めなさい。

問題 III 下図のように、半径1の円周上に円周を12等分にする点A～Lをこの順に左回り（反時計回り）になるようにとり、これらの点から3点を結んで三角形を作る。次の各問に答えなさい。



- (1) 作られる三角形の総数を求めなさい。
- (2) (1)のうち、直角三角形の個数を求めなさい。
- (3) (1)のうち、二等辺三角形の個数を求めなさい。
ただし、正三角形も二等辺三角形に含むものとする。
- (4) $\triangle AFG$ の面積を求めなさい。
- (5) $\triangle FGH$ の面積を求めなさい。

解答

問題 I

(1) 無理数の計算, 2 次方程式の融合問題 (数学 I)

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ に } x = 1 - \sqrt{3} \text{ を代入すると, } (1 - \sqrt{3})^2 + a(1 - \sqrt{3}) + b = -(a + 2)\sqrt{3} + (a + b + 4) = 0$$

a, b は有理数より $a + 2$, $a + b + 4$ はともに有理数であり, $\sqrt{3}$ は無理数であるから,

$$a + 2 = 0 \text{ かつ } a + b + 4 = 0 \quad \text{よって, } \underline{a = -2, b = -2}$$

(2) 展開・因数分解 (数学 I)

$$\begin{aligned} x^2 - xy - 2y^2 - 2x + 7y - 3 &= x^2 - (y + 2)x - 2y^2 + 7y - 3 = x^2 - (y + 2)x - (2y - 1)(y - 3) \\ &= \{x - (2y - 1)\}\{x + (y - 3)\} = \underline{(x - 2y + 1)(x + y - 3)} \end{aligned}$$

(3) 集合と命題 (数学 I)

$$A \subset B \text{ となるのは } a - 1 \leq 2 \text{ かつ } 4 \leq a + 3 \quad \text{つまり, } \underline{1 \leq a \leq 3}$$

(4) 図形の性質 (数学 A)

直線 OP と円との交点を C, D ($PC > PD$) とすると,

$$PC = OC + OP = 4 + OP, \quad PD = OD - OP = 4 - OP$$

$$\text{方べきの定理より, } PC \cdot PD = PA \cdot PB \Leftrightarrow (4 + OP)(4 - OP) = 14 \Leftrightarrow OP^2 = 2$$

$$\text{よって, } OP = \underline{\sqrt{2}}$$

問題Ⅱ 2次関数 (数学Ⅰ)

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ より, C と x 軸の交点の座標は $(1, 0), (3, 0)$

(2) C を x 軸方向に 2, y 軸方向に -3 だけ平行移動して得られる放物線の方程式は

$$y = (x-2)^2 - 4(x-2) + 3 - 3 = x^2 - 8x + 12 \quad \text{よって, } \underline{y = x^2 - 8x + 12}$$

(3) $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ より, C の頂点の座標は $(2, -1)$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \text{ より, } x = 0, 4$$

よって, 最大値が 3, 最小値が -1 となるような a のとり得る値は $2 \leq a \leq 4$

問題Ⅲ 図形と計量 (数学 I), 図形の性質 (数学 A), 場合の数 (数学 A) の融合問題

(1) 12 個の点から 3 点を選べばよいので, ${}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{220}$ 個

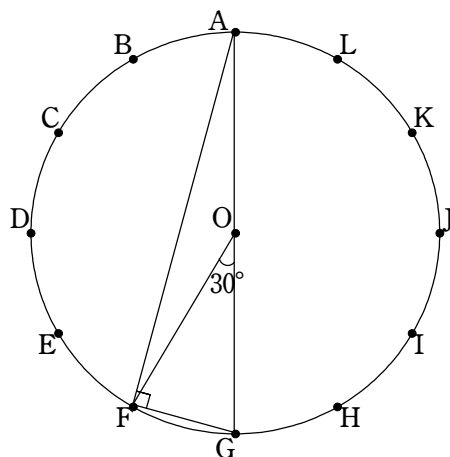
(2) 直角三角形となるのは円周角の定理より, 直径を辺にもつときである。

AG を 1 辺とする直角三角形は, 残る頂点を B~F, H~L の 10 個から選べばよいので 10 個ある。
これは BH, CI, DJ, EK, FL についても同様であり, これらの三角形の中に重複するものはないので, 作られる直角三角形の個数は $10 \times 6 = \underline{60}$ 個

(3) A を頂角とする二等辺三角形のうち, 正三角形でないものは $\triangle ABL$, $\triangle ACK$, $\triangle ADJ$, $\triangle AFH$ の 4 個ある。B~L についても同様であり, これらの三角形の中に重複するものはないので, 作られる (正三角形ではない) 二等辺三角形の個数は $4 \times 12 = 48$ 個

また, 正三角形は $\triangle AEI$, $\triangle BFJ$, $\triangle CGK$, $\triangle DHL$ の 4 個あるので, 求める二等辺三角形の総数は $48 + 4 = \underline{52}$ 個

(4) 円の中心を O とすると, 下図のようになる。



円周を 12 等分するので $\angle FOG = 30^\circ$ となる。よって, $\triangle AFG$ の面積は

$$\triangle AFG = \triangle OAF + \triangle OFG = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = \underline{\frac{1}{2}}$$

(5) 余弦定理より, $FG^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = 2 - \sqrt{3}$

$\angle FGH = 150^\circ$, $FG = GH$ であるから,

$$\triangle FGH = \frac{1}{2} \cdot FG \cdot GH \cdot \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot FG^2 \cdot \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \cdot (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} = \underline{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$$