問題 I 次の4問から2問を選んで解答しなさい。

(1) 2次方程式 $x^2 - 3\sqrt{3}\,x + 6 = 0$ の2つの解のうち，小さい方の解の小数部分を a とする。a^2 の値を求めなさい。

(2) $12x^2 + 7xy - 12y^2 + x + 18y - 6$ を因数分解しなさい。

(3) 実数 x，y に関する命題「$x = 3$ かつ $y = 1$ ならば $x^2 + y^2 = 10$」の対偶を記述し，その真偽を述べなさい。

(4) AB = 6，CA = 5 である△ABC において，∠BAC の二等分線が辺 BC と交わる点を D，辺 AC の中点を E，線分 AD と BE の交点を P，直線 CP と辺 AB の交点を F とする。このとき，線分 AF の長さを求めなさい。

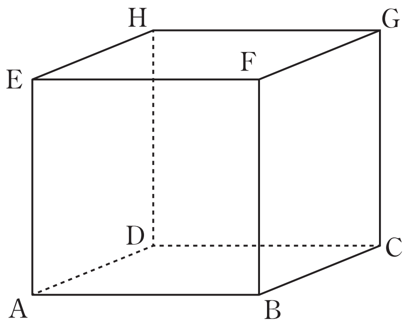
問題 II a は正の定数とする。放物線 $C：y = 2x^2 - 2ax + 2a + 6$ について，次の各問に答えなさい。

(1) C 上の x 座標が 1 である点を P とする。P の y 座標を求めなさい。

(2) C が x 軸と共有点をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めなさい。

(3) 原点を O，C と y 軸の交点を Q，C の頂点を R とする。△OQR の面積が 3 であるとき，a の値を求めなさい。

問題 III 下図のような1辺の長さが2である立方体ABCD−EFGHについて，次の各問に答えなさい。



(1) 8個の頂点から異なる4個の頂点を選ぶときの選び方の総数を求めなさい。

(2) (1)のうち，選んだ4点を結んでできる図形が四面体となる選び方の総数を求めなさい。

(3) 正四面体ACFHの体積を求めなさい。

(4) 線分FHの中点をM，$\angle\mathrm{AMC} = \theta$とするとき，$\cos\theta$の値を求めなさい。

(5) (4)のMについて，頂点AからCMに下ろした垂線と線分CMの交点をNとするとき，$\dfrac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NM}}$の値を求めなさい。

問題 IV $f(x) = 2\sin 2x$ とし，$f(x)$ の周期のうち正で最小のものを p とする。また，O を原点とする座標平面上において，関数 $y = f(x)$（$0 \leqq x \leqq p$）のグラフを C とする。次の各問に答えなさい。

(1) p の値を求めなさい。

(2) C 上の x 座標が $\dfrac{5}{6}\pi$ である点を P とする。線分 OP の中点の座標を求めなさい。

(3) C 上の y 座標が最大となる点を Q，y 座標が最小となる点を R とする。直線 QR の方程式を求めなさい。

(4) 直線 $y = \sqrt{3}$ と C の交点を S，T とする。△OST の面積を求めなさい。

(5) α，β は，$0 < \alpha < \beta < p$，$\beta - \alpha = \dfrac{\pi}{3}$ を満たすとする。C 上の x 座標が α，β である点をそれぞれ A，B とするとき，線分 AB の長さの最大値と最小値を求めなさい。

問題 V 関数 $f(x) = -x^2 + 4x$ について，次の各問に答えなさい。

(1) $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めなさい。

(3) t は $0 < t < 2$ を満たす定数とする。2点 A $(t,\ 0)$，B $(t,\ -t^2 + 4t)$ に対して，四角形 ABCD が長方形となるように点 C を $y = f(x)$ 上，点 D を x 軸上にとる。四角形 ABCD の面積を $S(t)$ とするとき，$S(t)$ を求めなさい。

(4) (3)の $S(t)$ について，$S(t) = 6$ となる t の値を求めなさい。

(5) (3)の $S(t)$ について，$S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めなさい。

解答

問題Ⅰ

（１）無理数の計算，２次方程式の融合問題（数学Ⅰ）

$x^2-3\sqrt{3}x+6=0 \iff (x-\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0 \iff x=\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}$ より，小さい方の解は $x=\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$ なので，$\sqrt{3}$ の整数部分は１

よって，小数部分は $a=\sqrt{3}-1$

$a^2=(\sqrt{3}-1)^2=\underline{4-2\sqrt{3}}$

（２）展開・因数分解（数学Ⅰ）

$12x^2+7xy-12y^2+x+18y-6=12x^2+(7y+1)x-6(2y^2-3y+1)=12x^2+(7y+1)x-6(y-1)(2y-1)$
$=\underline{(3x+4y-2)(4x-3y+3)}$

（３）集合と命題（数学Ⅰ）

命題「$x=3$ かつ $y=1$ ならば $x^2+y^2=10$」の対偶は「$\underline{x^2+y^2\neq 10 \text{ ならば } x\neq 3 \text{ または } y\neq 1}$」であり，

元の命題が真なので，この命題も<u>真</u>である。

（４）図形の性質（数学Ａ）

角の二等分線の性質より，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=6:5$

チェバの定理より，$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \iff \dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{1}{1}=1 \iff \dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=\dfrac{5}{6}$

よって，$\mathrm{AF}=6\cdot\dfrac{5}{11}=\underline{\dfrac{30}{11}}$

問題Ⅱ 2次関数（数学Ⅰ）

（1） $y=2\cdot 1^2-2a\cdot 1+2a+6=8$ より，P の y 座標は $\underline{8}$

（2） $2x^2-2ax+2a+6=0 \iff x^2-ax+a+3=0$ の判別式を D とすると，

$D=(-a)^2-4(a+3)=(a-6)(a+2)\geqq 0$

$a>0$ より， $\underline{a\geqq 6}$

（3） $\mathrm{Q}(0,\,2a+6)$， $C: y=2x^2-2ax+2a+6=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}+2a+6$ より， $\mathrm{R}\left(\frac{a}{2},\,-\frac{a^2}{2}+2a+6\right)$

であるから，OQ を底辺と考えて $\triangle\mathrm{OQR}=\frac{1}{2}\cdot(2a+6)\cdot\frac{a}{2}$

よって， $\frac{1}{2}\cdot(2a+6)\cdot\frac{a}{2}=3 \iff a^2+3a-6=0$ より， $a=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$

$a>0$ より， $\underline{a=\frac{-3+\sqrt{33}}{2}}$

問題Ⅲ　図形と計量（数学Ｉ），図形の性質（数学A），場合の数（数学A）の融合問題

（１）8個の頂点から異なる4個の頂点の選び方は${}_8C_4$ =C $\underline{70}$ 通り

（２）（１）のうち選んだ4点を結んだ図形が四面体とならないのは同一平面上にある4点を選んだときである。

選んだ4点が同一平面上にあるのは，①4点が各面の正方形上にあるとき，②4点が長方形ABGH，BCHE，CDEF，DAFG，ACGE，BDHF上にあるときであるから，その選び方は①が6通り，②が6通りである。

よって，選んだ4点を結んだ図形が四面体となるのは$70-(6+6)=\underline{58}$通り

（３）正四面体ACFHは立方体ABCD-EFGHから四面体F-ABC，H-ACD，A-EFH，C-FGHを切り取ってできる。

立方体ABCD-EFGHの体積は$2^3=8$，切り取る四面体の体積は$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2^3=\frac{4}{3}$であるから，正四面体ACFHの体積は$8-\frac{4}{3}\times 4=\underline{\frac{8}{3}}$

（４）四角形EFGHは正方形であるから，対角線EGとFHは中点で交わるため，Mは対角線EGの中点でもある。

よって，$\mathrm{EM}=\mathrm{GM}=\sqrt{2}$であり，三平方の定理より，$\mathrm{AM}=\mathrm{CM}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$となる。

△ACMにおいて余弦定理より，$\cos\theta=\frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{CM}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{CM}}=\frac{6+6-8}{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{\underline{3}}$

（５）△AMNは$\angle\mathrm{AMN}=\theta$，$\angle\mathrm{ANM}=90^\circ$の直角三角形であるから，$\mathrm{NM}=\mathrm{AM}\cos\theta=\sqrt{6}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\mathrm{CN}=\mathrm{CM}-\mathrm{NM}=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$より，$\frac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NM}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{6}}=\underline{2}$

問題Ⅳ　　図形と方程式，三角関数（数学Ⅱ）の融合問題

（1）関数 $f(x)=2\sin 2x$ の周期のうち正で最小のものは $2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$ より， $p=\underline{\pi}$

（2） $f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=2\sin\frac{5}{3}\pi=-\sqrt{3}$ より， $\mathrm{P}\left(\frac{5}{6}\pi,-\sqrt{3}\right)$

よって，線分 OP の中点の座標は $\left(\frac{5}{12}\pi,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（3） $\mathrm{Q}\left(\frac{\pi}{4},2\right)$， $\mathrm{R}\left(\frac{3}{4}\pi,-2\right)$ より，直線 QR の方程式は $y=\dfrac{-2-2}{\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2=-\frac{8}{\pi}x+4$

よって， $y=-\frac{8}{\pi}x+4$

（4） $f(x)=\sqrt{3}\ \Leftrightarrow\ \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$　 $0\leqq 2x\leqq 2\pi$ より， $2x=\frac{\pi}{3}$， $\frac{2}{3}\pi\ \Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{6}$， $\frac{\pi}{3}$

よって，S，T の座標は $\left(\frac{\pi}{6},\sqrt{3}\right)$， $\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{3}\right)$ より，$\mathrm{ST}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

よって，△OST の面積は $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot\sqrt{3}=\underline{\frac{\sqrt{3}}{12}\pi}$

（5） $\beta=\alpha+\frac{\pi}{3}$ より， $f(\beta)=2\sin\left(2\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)=2\left(\sin 2\alpha\cos\frac{2}{3}\pi+\cos 2\alpha\sin\frac{2}{3}\pi\right)=-\sin 2\alpha+\sqrt{3}\cos 2\alpha$ であるから，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(f(\beta)-f(\alpha))^2}=\sqrt{\frac{\pi^2}{9}+(-3\sin 2\alpha+\sqrt{3}\cos 2\alpha)^2}=\sqrt{\frac{\pi^2}{9}+\left\{2\sqrt{3}\sin\left(2\alpha+\frac{5}{6}\pi\right)\right\}^2}$$

また， $\beta=\alpha+\frac{\pi}{3}$， $0<\alpha<\beta=\alpha+\frac{\pi}{3}<p=\pi$ より， $0<\alpha<\frac{2}{3}\pi\ \Leftrightarrow\ \frac{5}{6}\pi<2\alpha+\frac{5}{6}\pi<\frac{13}{6}\pi$

よって，線分 AB の長さは

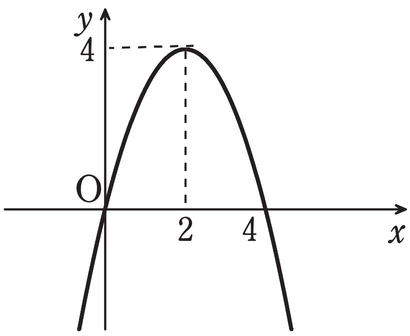
$2\alpha+\frac{5}{6}\pi=\frac{3}{2}\pi\ \Leftrightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{3}$ のとき，最大値 $\sqrt{\frac{\pi^2}{9}+(-2\sqrt{3})^2}=\underline{\sqrt{\frac{\pi^2}{9}+12}}$

$2\alpha+\frac{5}{6}\pi=\pi$， $2\pi\ \Leftrightarrow\ \alpha=\frac{\pi}{12}$， $\frac{7}{12}\pi$ のとき，最小値 $\sqrt{\frac{\pi^2}{9}+0^2}=\underline{\frac{\pi}{3}}$　 をとる。

問題Ｖ　　微分法と積分法（数学Ⅱ）・２次関数（数学Ⅰ）の融合問題

（１）$f(x)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$ なので，軸の方程式は $x=2$，頂点の座標は $(2,\ 4)$

グラフは，下の図のようになる。



（２）求める面積を S とすると，$S=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\underline{\dfrac{32}{3}}$

（３）$\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(t,\ -t^2+4t)$，$\mathrm{C}(4-t,\ -t^2+4t)$，$\mathrm{D}(4-t,\ 0)$ となるので，

$S(t)=\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}=(-t^2+4t)(4-2t)=\underline{2t^3-12t^2+16t}$

（４）$S(t)=6 \iff t^3-6t^2+8t-3=0 \iff (t-1)(t^2-5t+3)=0 \iff t=1,\ \dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$

$0<t<2$ なので，$\underline{t=1,\ \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}}$

（５）$S'(t)=6t^2-24t+16$ より，$S'(t)=6t^2-24t+16=0 \iff t=\dfrac{6\pm2\sqrt{3}}{3}$ なので，

$0<t<2$ における増減表は

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗		↘	

$S(t)=(6t^2-24t+16)\left(\dfrac{1}{3}t-\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{16}{3}t+\dfrac{32}{3}$ より，

$t=\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$ のとき，$S\left(\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\right)=0-\dfrac{16}{3}\cdot\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{32}{3}=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$ となるので，

$S(t)$ は $t=\underline{\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}}$ のとき，最大値 $\underline{\dfrac{32\sqrt{3}}{9}}$ をとる。