**問題 I** 次の(1)～(4)の各問に答えよ。

(1) $a$ を実数とする。不等式 $3x - 5 \leqq x + 3$ の解は $x \leqq$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，$a \leqq x \leqq$ $\boxed{\text{ア}}$ を満たす整数 $x$ の個数がちょうど6個であるとき，$a$ のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{イウ}} < a \leqq \boxed{\text{エオ}}$ である。

(2) $a$ を実数とする。2次方程式 $x^2 - 4ax + 3a + 1 = 0$ が重解をもつとき，

$a = \dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ である。また，正の解と負の解をもつとき，$a$ のとり得る値の範囲は $a < \dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(3) $\dfrac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \dfrac{1}{\boxed{\text{ス}}}\left(\dfrac{1}{3k-1} - \dfrac{1}{3k+2}\right)$ であるので，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

(4) 多項式 $P(x)$ を $x^2 - 3x + 2$ で割ると $5x + 1$ 余り，$x + 4$ で割ると $-11$ 余る。$P(x)$ を $x^2 + 2x - 8$ で割ったときの余りは $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}x + \dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

**問題 II**　A，B，C の３人が以下のルールに従って試合をして，優勝者を決める。

＜ルール＞

(i)　３人のうち最初に試合をする２人をくじで決める。

(ii)　試合に勝った人が試合をしていない人と次の試合を行う。

(iii)　最初に連続して勝った人を優勝者とする。優勝者が決まった場合は以降の試合は行わず，優勝者が決まらない場合は(ii)に従って試合を繰り返す。

例えば最初のくじで A と B が選ばれた場合，１試合目は A と B が試合をする。１試合目で A が勝った場合，２試合目は A と C が試合をし，２試合目で A が勝ったときは A が優勝者となり，C が勝ったときは B と C で３試合目を行う。

それぞれの試合で相手に勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であるとし，各試合に引き分けはないものとする。

(1)　２試合目に A が優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2)　３試合目で A が優勝者となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$ である。

(3)　５試合目で優勝者が決まる確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ である。

**問題 III** $r_1$，$r_2$ は正の定数とする。平面上に A を中心とする半径 $r_1$ の円 $C_1$ と B を中心とする半径 $r_2$ の円 $C_2$ がある。円 $C_1$ と $C_2$ は異なる 2 点 P，Q で交わっているとする。

(1) $r_1 = 5$，$r_2 = 3$ のとき，線分 AB の長さのとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}} < \text{AB} < \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $r_1 = 5$，$r_2 = 3$，$\text{AB} = 2\sqrt{6}$ のとき，2 つの円に接する直線を $l$ として，$l$ と円 $C_1$，$C_2$ の接点をそれぞれ C，D とすると，$\text{CD} = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

また，直線 $l$ と直線 AB のなす角を $\theta$（$0° < \theta < 90°$）とすると，$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

以下，$r_1 = 2\sqrt{3}$，$r_2 = 2$ として，点 P における円 $C_1$ の接線が点 B を通り，点 P における円 $C_2$ の接線が点 A を通るときを考える。

(3) $\text{AB} = \boxed{\text{キ}}$ であり，$\text{PQ} = \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(4) 四角形 AQBP の面積は $\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ であり，四角形 AQBP の内接円の半径は $\boxed{\text{シ}} - \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(5) 円 $C_1$ と円 $C_2$ が重なる部分において，円 $C_2$ と弦 PQ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\pi - \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ である。

**問題 IV** 100 人の生徒に英語と数学の小テストを実施したところ，英語の合格者は 60 人，数学の合格者は 55 人であった。

(1) 英語の合格者のうち，数学が不合格であった生徒が 15 人いた。このとき，英語と数学の両方に合格した生徒は **アイ** 人であり，両方とも不合格であった生徒は **ウエ** 人である。

(2) 英語に合格していないと，数学に合格できないとする。このとき，英語に合格しているということは，数学に合格するための **オ** 。 オ に当てはまるものを次の⓪〜③から 1 つ選べ。

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない

① 必要十分条件である

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

また，このとき，英語と数学の両方とも不合格であった生徒は **カキ** 人である。

(3) 英語と数学の両方に合格した生徒の人数を $x$ 人とすると，$x$ の最小値 **クケ** ，$x$ の最大値は **コサ** である。

**問題 V**　$a$ を正の実数とする。座標平面上で曲線 $C: y = x^3$ 上の点 P（$a$, $a^3$）における接線を $l$ とし，曲線 $C$ と $l$ の共有点のうち P と異なるものを Q とする。

(1) 点 Q の $x$ 座標は $\boxed{\text{アイ}}\, a$ である。

(2) 曲線 $C$ と直線 $l$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}} a^4$ である。

(3) $b$, c を実数とする。放物線 $y = x^2 + bx + c$ が点 P で直線 $l$ と接するとき，$b$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，$c$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

問題 I

| 問題 | （1） | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ア | イ | ウ | エ | オ |
| 解答 | 4 | − | 2 | − | 1 |

| 問題 | （2） | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | カ | キ | ク | ケ | コ | サ | シ |
| 解答 | − | 1 | 4 | 1 | − | 1 | 3 |

| 問題 | （3） | | | | （4） | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ス | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ | ト | ナ | ニ |
| 解答 | 3 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |

（1） $3x-5 \leqq x+3 \iff x \leqq 4$

$a \leqq x \leqq 4$ を満たす整数 $x$ の個数がちょうど 6 個になるのは $-2 < a \leqq -1$ のとき

（2） $x^2-4ax+3a+1=0$ が重解をもつのは $x^2-4ax+3a+1=0$ の判別式を $D$ とすると，

$$\frac{D}{4}=(2a)^2-(3a+1)=(4a+1)(a-1)=0 \iff a=\frac{-1}{4},\ 1$$

正の解と負の解をもつのは $f(x)=x^2-4ax+3a+1$ とすると，

$$f(0)=3a+1<0 \iff a<\frac{-1}{3}$$

（3） $\dfrac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3k-1}-\dfrac{1}{3k+2}\right)$ であるので，

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{32}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)=\frac{5}{32}$$

（4） $P(x)$ を $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ で割ると $5x+1$ 余るので，

$P(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+5x+1$ ……①　と表せる。

また， $P(x)$ を $x+4$ で割ると $-11$ 余るので

$P(x)=(x+4)Q_2(x)-11$ ……②　と表せる。

$P(x)$ を $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$ で割ったときの商を $R(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$P(x)=(x-2)(x+4)R(x)+ax+b$ ……③　と表せる。

③，①より　$P(2)=2a+b=11$ ……④

③，②より　$P(-4)=-4a+b=-11$ ……⑤

④，⑤より　$a=\dfrac{11}{3}$，$b=\dfrac{11}{3}$ なので，余りは $\dfrac{11}{3}x+\dfrac{11}{3}$

**問題Ⅱ**

<table>
<tr><td rowspan="2">問題</td><td colspan="2">（1）</td><td colspan="3">（2）</td><td colspan="3">（3）</td></tr>
<tr><td>ア</td><td>イ</td><td>ウ</td><td>エ</td><td>オ</td><td>カ</td><td>キ</td><td>ク</td></tr>
<tr><td>解答</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>6</td></tr>
</table>

（1）最初のくじでAが選ばれる確率は$\dfrac{1\cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_3\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{3}$

1試合目でAが勝つ確率は$\dfrac{1}{2}$，2試合目でもAが勝つ確率は$\dfrac{1}{2}$

よって，求める確率は$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

（2）3試合目でAが優勝者となるのは，くじでAが選ばれず，2・3試合目でAが連勝すればよいので，求める確率は$\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{12}$

（3）5試合目でAが優勝者となるとき，「くじでAとBが選ばれてA→C→B→A→Aの順で勝つ」または「くじでAとCが選ばれてA→B→C→A→Aの順で勝つ」のいずれかより，$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\times 2=\dfrac{1}{48}$

5試合目でBが優勝者，Cが優勝者となる確率も同様に$\dfrac{1}{48}$より，求める確率は$\dfrac{1}{48}\times 3=\dfrac{1}{16}$

（別解）1試合目の勝敗に関わらず，2～4試合目は前の試合の勝者が負けて，5試合目で4試合目の勝者が勝てば5試合目で優勝者が決まるので，求める確率は$1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{16}$

## 問題Ⅲ

| 問題 | （1） | | （2） | | | | （3） | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ |
| 解答 | 2 | 8 | 2 | 5 | 5 | 5 | 4 | 2 | 3 |

| 問題 | （4） | | | | （5） | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | コ | サ | シ | ス | セ | ソ | タ |
| 解答 | 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 |

（1）2円が異なる2点で交わる条件は$|r_1 - r_2| < \mathrm{AB} < r_1 + r_2$であるから，$2 < \mathrm{AB} < 8$

（2）BからACに垂線を下ろし，その交点をEとすると，四角形CEBDは長方形であるから，

$\mathrm{CE} = \mathrm{DB} = 3$，$\mathrm{CD} = \mathrm{EB}$より，$\triangle\mathrm{ABE}$は$\mathrm{AB} = 2\sqrt{6}$，$\mathrm{AE} = 5 - 3 = 2$，$\angle\mathrm{AEB} = 90^\circ$

三平方の定理より，$\mathrm{CD} = \mathrm{EB} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AE}^2} = \sqrt{24 - 4} = 2\sqrt{5}$

また，直線$l$とBEは平行であるから，$\angle\mathrm{ABE} = \theta$となるので，$\tan\theta = \dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

（3）条件より$\mathrm{AP} \perp \mathrm{BP}$であるから，$\triangle\mathrm{ABP}$は直角三角形である。

よって，$\mathrm{AB} = \sqrt{4 + 12} = 4$

また，$\mathrm{AB} : \mathrm{BP} : \mathrm{AP} = 4 : 2 : 2\sqrt{3} = 2 : 1 : \sqrt{3}$であるから，$\angle\mathrm{PAB} = 30^\circ$なので，ABとPQの交点をFとすると，$\mathrm{PF} = \sqrt{3}$，$\mathrm{PQ} = 2\sqrt{3}$

（4）四角形AQBPの面積を$S$，内接円の半径を$r$とする。

$\triangle\mathrm{ABP}$は直角三角形であるから，$\triangle\mathrm{ABP} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$であり，$S = 2\triangle\mathrm{ABP} = 4\sqrt{3}$

また，$S = \dfrac{r}{2}(\mathrm{AP} + \mathrm{AQ} + \mathrm{BP} + \mathrm{BQ}) = \dfrac{r}{2}(2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2 + 2) = 2(\sqrt{3} + 1)r$であるから，

$$r = \frac{4\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = 3 - \sqrt{3}$$

（5）円$C_2$と弦PQで囲まれる部分の面積を$S$とする。

$\angle\mathrm{PBQ} = 120^\circ$であるから，$S = \text{扇形PBQ} - \triangle\mathrm{PBQ} = 2^2\pi \times \dfrac{120^\circ}{360^\circ} - \dfrac{1}{2} \cdot 2^2 \sin 120^\circ = \dfrac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

問題Ⅳ

| 問題 | （１） | | | | （２） | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ |
| 解答 | 4 | 5 | 3 | 0 | 0 | 4 | 0 |

| 問題 | （３） | | | |
|---|---|---|---|---|
| | ク | ケ | コ | サ |
| 解答 | 1 | 5 | 5 | 5 |

英語の合格者の集合を $A$, 数学の合格者の集合を $B$, 全体集合を $U$ で表すと, $n(U)=100$ , $n(A)=60$ , $n(B)=55$ である。

（１）条件より $n(A\cap\overline{B})=15$ であるから，英語と数学の両方の合格者 $A\cap B$ は
$n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\overline{B})=60-15=45$ 人である。
また，両方の不合格者 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=n(U)-\left\{n(A\cap\overline{B})+n(B)\right\}=100-(15+55)=30 \text{ 人である。}$$

（２）「英語に合格していない」⇒「数学に合格できない」の対偶をとると,「数学に合格する」⇒「英語に合格する」。したがって，英語に合格しているということは，数学に合格するための必要条件であるが，十分条件ではない。　よって，解答は⓪
また， $A\supset B$ であるから， $A\cup B=A$ である　よって，英語と数学両方の不合格者 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は
$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=n(U)-n(A)=100-60=40$ 人である。

（３） $n(A\cap B)=x$ であるから， $n(A\cap\overline{B})=60-x$ ， $n(\overline{A}\cap B)=55-x$ ,
$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(U)-n(A\cup B)=100-(60-x+55-x+x)=x-15$ であり, これらはすべて負でない整数であるので， $x\geqq 0$ かつ $60-x\geqq 0$ かつ $55-x\geqq 0$ かつ $x-15\geqq 0$ より， $15\leqq x\leqq 55$
よって，$x$ の最小値は 15，最大値は 55 である。

**問題Ⅴ**

| 問題 | （1） | | （2） | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ア | イ | ウ | エ | オ |
| 解答 | − | 2 | 2 | 7 | 4 |

| 問題 | （3） | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | カ | キ | ク | ケ | コ | サ |
| 解答 | − | 1 | 3 | 1 | 2 | 7 |

（1） $y=x^3$ に対して， $y'=3x^2$ である。

接線 $l$ の方程式は $y=3a^2(x-a)+a^3$ ， すなわち $y=3a^2x-2a^3$ なので,

$x^3=3a^2x-2a^3 \iff (x-a)^2(x+2a)=0 \iff x=a$ ， $-2a$

点 Q の $x$ 座標は $-2a$

（2）求める面積を $S$ とすると,

$$S=\int_{-2a}^{a}(x^3-3a^2x+2a^3)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3a^2}{2}x^2+2a^3x\right]_{-2a}^{a}=\frac{27}{4}a^4$$

（3） $y=x^2+bx+c$ に対して， $y'=2x+b$

$\begin{cases} a^3=a^2+ab+c \\ 3a^2=2a+b \end{cases}$ が成り立つ。

$b=3a^2-2a=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$ となるので， $a>0$ において，$b$ の最小値は $\frac{-1}{3}$

また， $c=a^3-a^2-ab=a^3-a^2-a(3a^2-2a)=-2a^3+a^2$ となるので,

$f(a)=-2a^3+a^2$ とすると， $f'(a)=-6a^2+2a=-2a(3a-1)$ であるので,

$f(a)$ の増減は次のようになる。

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(a)$ | | $\nearrow$ | $\frac{1}{27}$ | $\searrow$ |

よって，$c$ の最大値は $\frac{1}{27}$