問題 I 次の(1)～(4)の各問に答えよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \boxed{\text{ア}} - \boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，

$$\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2 = \boxed{\text{エオカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$$ である。

(2) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$\sin\alpha = \dfrac{1}{4}$，$\cos\beta = \dfrac{2}{3}$ であるとき，

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$\sin\beta = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。また，α，β の大小関係は $\boxed{\text{ス}}$ である。$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを次の⓪～②から1つ選べ。

⓪ $\alpha < \beta$　　① $\alpha = \beta$　　② $\alpha > \beta$

(3) 公比が実数である等比数列$\{a_n\}$において，$a_3 = 1$，$a_6 = \dfrac{1}{27}$ である。このとき，

$a_1 = \boxed{\text{セ}}$ であり，$a_n = \dfrac{1}{243}$ となるとき，$n = \boxed{\text{ソ}}$ である。

(4) a，b，c を実数とする。3次方程式 $x^3 + ax^2 + 7x + b = 0$ の解が $x = -3$，1，c であるとき，$a = \boxed{\text{タ}}$，$b = \boxed{\text{チツテ}}$，$c = \boxed{\text{トナ}}$ である。

問題 II 3個のさいころを同時に投げて，出た目の積を X とする。

(1) $X = 2$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

(2) $X = 12$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(3) X が 3 の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

(4) X が 4 の倍数である確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

問題 III AB ＝ 3，BC ＝ 5，CA ＝ 4 である△ABC の外接円において，弧 AC のうち，B を含まない部分に点 D をとる。

(1) △ABC の外接円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) CD ＝ 2 のとき BD ＝ $\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(3) CD ＝ 3 のとき AD ＝ $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であり，直線 AB と直線 CD の交点を P とすると

PA ＝ $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(4) D が弧 AC（B を含まない部分）上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{ADC} = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であり，四角形 ABCD の面積が最大となるのは CD ＝ $\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ のときである。

問題 IV $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ とし，$g(x) = |f(x)|$ とする。また，曲線 $y = g(x)$ を C とする。

(1) $f(x)$ は $x = \boxed{\text{ア}} \pm \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ で極値をもつ。

(2) $g\left(\boxed{\text{ア}} + \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}} \right) = \dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの図形の面積の和は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(4) $0 < t < 1$ とし，曲線 C 上の x 座標が t である点を P，点 P における C の接線を l とする。

接線 l が点（2，0）を通るとき，$t = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

解答

問題Ⅰ

問題	（1）						
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
解答	5	2	6	−	4	0	6

問題	（2）					
	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
解答	1	5	4	5	3	0

問題	（3）		（4）					
	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
解答	9	8	7	−	1	5	−	5

（1） $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{3-2}=5-2\sqrt{6}$，$\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2=(5-2\sqrt{6})^2-(5+2\sqrt{6})^2=-40\sqrt{6}$

（2） $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$， $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より， $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$， $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{3-4\sqrt{5}}{12}<0$　 $\sin\alpha<\sin\beta$ より， $\alpha<\beta$　よって，解答は⓪

（3）初項を a，公比を r とすると， $a_3=ar^2=1$ ……①， $a_6=ar^5=\dfrac{1}{27}$ ……②

①，②より， $r=\dfrac{1}{3}$， $a=a_1=9$

$a_n=\dfrac{1}{243} \Leftrightarrow 9\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^5$ より， $n=8$

（4） $x^3+ax^2+7x+b=0$ の解が $x=-3$，1 より，

$(-3)^3+a\cdot(-3)^2+7\cdot(-3)+b=0 \Leftrightarrow 9a+b=48$ ……①

$1^3+a\cdot 1^2+7\cdot 1+b=0 \Leftrightarrow a+b=-8$ ……②

①，②より， $a=7$， $b=-15$

$x^3+7x^2+7x-15=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)(x+5)=0 \Leftrightarrow x=-3$，1， -5

よって， $c=-5$

問題Ⅱ

問題	（1）			（2）		
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ
解答	1	7	2	5	7	2

問題	（3）				（4）	
	キ	ク	ケ	コ	サ	シ
解答	1	9	2	7	5	8

（1） $X=2$ となるのは 3 つの目が「2 つが 1，1 つが 2」となるときなので，求める確率は $\dfrac{\frac{3!}{2!}}{6^3}=\dfrac{1}{72}$

（2） $X=12$ となるのは 3 つの目が「1 つが 1，1 つが 2，1 つが 6」，「1 つが 1，1 つが 3，1 つが 4」，

「2 つが 2，1 つが 3」のいずれかより，求める確率は $\dfrac{3!\times 2+\frac{3!}{2!}}{6^3}=\dfrac{15}{216}=\dfrac{5}{72}$

（3） X が 3 の倍数とならないのは 3 つの目がすべて 3 の倍数でないときより，その確率は $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3=\dfrac{8}{27}$

よって，求める確率は $1-\dfrac{8}{27}=\dfrac{19}{27}$

（4） X が 4 の倍数とならないのは 3 つの目が「すべて奇数」または「1 つが 2 または 6，2 つが奇数」

のいずれかより，その確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{6}\right)\left(\dfrac{3}{6}\right)^2=\dfrac{3}{8}$

よって，求める確率は $1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$

問題Ⅲ

問題	（１）		（２）		（３）			
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
解答	5	2	2	1	7	5	7	6

問題	（４）			
	ケ	コ	サ	シ
解答	―	3	5	5

（１）$AB=3$，$BC=5$，$CA=4$ より $\triangle ABC$ は $\angle BAC=90^\circ$ の直角三角形であるから，BC が外接円の直径となるので外接円の半径は $\dfrac{5}{2}$

（２）$\triangle BCD$ は $\angle BDC=90^\circ$ の直角三角形であるから， $BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$

（３）$CD=3$ のとき， $\cos\angle ADC=\cos(180^\circ-\angle ABC)=-\cos\angle ABC=-\dfrac{3}{5}$ であるから $\triangle ADC$ において余弦定理より， $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC \Leftrightarrow 16=AD^2+9-2\cdot AD\cdot 3\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)$

$\Leftrightarrow AD^2+\dfrac{18}{5}AD-7=0 \Leftrightarrow (AD+5)\left(AD-\dfrac{7}{5}\right)=0$　　$AD>0$ より $AD=\dfrac{7}{5}$

このとき， $AB=CD$ より四角形 ABCD は等脚台形であるから $PA=PD$， $PB=PC$

よって， $PA=x$ とおくと $\triangle PAD\backsim\triangle PBC$ より， $\dfrac{x}{\frac{7}{5}}=\dfrac{x+3}{5} \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{6}$

（４） $\cos\angle ADC=\cos(180^\circ-\angle ABC)=-\cos\angle ABC=-\dfrac{3}{5}$

D が弧 AC 上を動くとき，$\triangle ACD$ の面積が最大となるのは $CD=AD$ のときである。

$\cos\angle ADC=-\dfrac{3}{5}$ であるから， $CD=AD=y$ とおくと $\triangle ADC$ において余弦定理より，

$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC \Leftrightarrow 16=y^2+y^2+\dfrac{6}{5}y^2 \Leftrightarrow y^2=5 \Leftrightarrow y=\sqrt{5}$

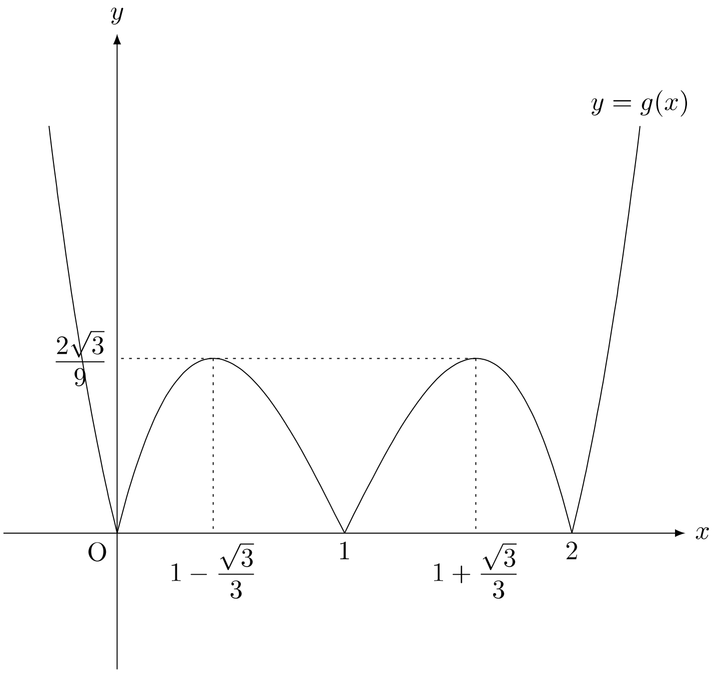
問題Ⅳ

問題	（1）			（2）			（3）		（4）	
	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
解答	1	3	3	2	3	9	1	2	1	2

（1）$f'(x)=3x^2-6x+2$ であって，$f'(x)=0 \iff x=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ であるから，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	$1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

よって，$f(x)$ は $x=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で極値をもつ



（2）$f(x)=x(x-1)(x-2)$ であるので，$f\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1\right)=-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

よって，$g\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left|-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

（３）求める図形の面積の和を S とすると，

$$S=\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_1^2 \{-(x^3-3x^2+2x)\}\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2=\frac{1}{2}$$

（別解）対称性を利用して，$\dfrac{S}{2}=\displaystyle\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}$

よって，$S=\dfrac{1}{2}$

（４）接線 l の方程式：$y=(3t^2-6t+2)(x-t)+t^3-3t^2+2t$

l が点 $(2, 0)$ を通るので，$(3t^2-6t+2)(2-t)+t^3-3t^2+2t=0$

$(t-2)^2(2t-1)=0$　　$0<t<1$ より，$t=\dfrac{1}{2}$