問題 I 次の4問から2問を選んで解答しなさい。

(1) 2次方程式 $x^2 - 3\sqrt{3}\,x + 6 = 0$ の2つの解のうち，小さい方の解の小数部分を a とする。a^2 の値を求めなさい。

(2) $12x^2 + 7xy - 12y^2 + x + 18y - 6$ を因数分解しなさい。

(3) 実数 x，y に関する命題「$x = 3$ かつ $y = 1$ ならば $x^2 + y^2 = 10$」の対偶を記述し，その真偽を述べなさい。

(4) AB = 6，CA = 5 である△ABC において，∠BAC の二等分線が辺 BC と交わる点を D，辺 AC の中点を E，線分 AD と BE の交点を P，直線 CP と辺 AB の交点を F とする。このとき，線分 AF の長さを求めなさい。

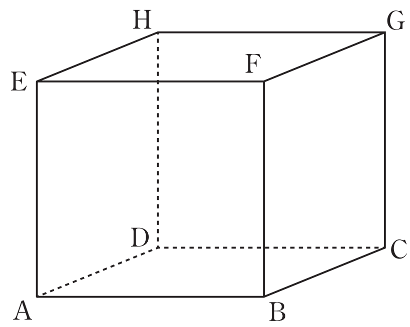
問題 II a は正の定数とする。放物線 $C : y = 2x^2 - 2ax + 2a + 6$ について，次の各問に答えなさい。

(1) C 上の x 座標が 1 である点を P とする。P の y 座標を求めなさい。

(2) C が x 軸と共有点をもつとき，a のとり得る値の範囲を求めなさい。

(3) 原点を O，C と y 軸の交点を Q，C の頂点を R とする。△OQR の面積が 3 であるとき，a の値を求めなさい。

問題 III 下図のような 1 辺の長さが 2 である立方体 ABCD − EFGH について，次の各問に答えなさい。



(1) 8 個の頂点から異なる 4 個の頂点を選ぶときの選び方の総数を求めなさい。

(2) (1)のうち，選んだ 4 点を結んでできる図形が四面体となる選び方の総数を求めなさい。

(3) 正四面体 ACFH の体積を求めなさい。

(4) 線分 FH の中点を M，$\angle \mathrm{AMC} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めなさい。

(5) (4)の M について，頂点 A から CM に下ろした垂線と線分 CM の交点を N とするとき，$\dfrac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NM}}$ の値を求めなさい。

解答

問題 I

（1）無理数の計算，2 次方程式の融合問題（数学 I）

$x^2-3\sqrt{3}x+6=0 \iff (x-\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})=0 \iff x=\sqrt{3}$， $2\sqrt{3}$ より，小さい方の解は $x=\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$ なので，$\sqrt{3}$ の整数部分は 1

よって，小数部分は $a=\sqrt{3}-1$

$a^2=(\sqrt{3}-1)^2=\underline{4-2\sqrt{3}}$

（2）展開・因数分解（数学 I）

$12x^2+7xy-12y^2+x+18y-6=12x^2+(7y+1)x-6(2y^2-3y+1)=12x^2+(7y+1)x-6(y-1)(2y-1)$
$=\underline{(3x+4y-2)(4x-3y+3)}$

（3）集合と命題（数学 I）

命題「$x=3$ かつ $y=1$ ならば $x^2+y^2=10$」の対偶は「$\underline{x^2+y^2\neq 10 \text{ ならば } x\neq 3 \text{ または } y\neq 1}$」であり，

元の命題が真なので，この命題も<u>真</u>である。

（4）図形の性質（数学 A）

角の二等分線の性質より，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=6:5$

チェバの定理より，$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \iff \dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{1}{1}=1 \iff \dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=\dfrac{5}{6}$

よって，$\mathrm{AF}=6\cdot\dfrac{5}{11}=\underline{\dfrac{30}{11}}$

問題Ⅱ 2次関数（数学Ⅰ）

（1） $y=2\cdot1^2-2a\cdot1+2a+6=8$ より，Pの y 座標は $\underline{8}$

（2） $2x^2-2ax+2a+6=0 \iff x^2-ax+a+3=0$ の判別式を D とすると，

$D=(-a)^2-4(a+3)=(a-6)(a+2)\geqq0$

$a>0$ より， $\underline{a\geqq6}$

（3） $\mathrm{Q}(0,\,2a+6)$， $C: y=2x^2-2ax+2a+6=2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{2}+2a+6$ より， $\mathrm{R}\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a^2}{2}+2a+6\right)$

であるから，OQを底辺と考えて $\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{1}{2}\cdot(2a+6)\cdot\dfrac{a}{2}$

よって， $\dfrac{1}{2}\cdot(2a+6)\cdot\dfrac{a}{2}=3 \iff a^2+3a-6=0$ より， $a=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}$

$a>0$ より， $\underline{a=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{2}}$

問題Ⅲ　図形と計量（数学Ⅰ），図形の性質（数学A），場合の数（数学A）の融合問題

（1）8個の頂点から異なる4個の頂点の選び方は${}_8C_4$ =C $\underline{70}$ 通り

（2）（1）のうち選んだ4点を結んだ図形が四面体とならないのは同一平面上にある4点を選んだときである。

選んだ4点が同一平面上にあるのは，①4点が各面の正方形上にあるとき，②4点が長方形ABGH，BCHE，CDEF，DAFG，ACGE，BDHF上にあるときであるから，その選び方は①が6通り，②が6通り である。

よって，選んだ4点を結んだ図形が四面体となるのは$70-(6+6)=\underline{58}$通り

（3）正四面体ACFHは立方体ABCD-EFGHから四面体F-ABC，H-ACD，A-EFH，C-FGHを切り取ってできる。

立方体ABCD-EFGHの体積は$2^3=8$，切り取る四面体の体積は$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2^3=\dfrac{4}{3}$であるから，正四面体ACFHの体積は$8-\dfrac{4}{3}\times4=\underline{\dfrac{8}{3}}$

（4）四角形EFGHは正方形であるから，対角線EGとFHは中点で交わるため，Mは対角線EGの中点でもある。

よって，$\mathrm{EM}=\mathrm{GM}=\sqrt{2}$であり，三平方の定理より，$\mathrm{AM}=\mathrm{CM}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$となる。

$\triangle$ACMにおいて余弦定理より，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{CM}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{CM}}=\dfrac{6+6-8}{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\underline{\dfrac{1}{3}}$

（5）$\triangle$AMNは$\angle\mathrm{AMN}=\theta$，$\angle\mathrm{ANM}=90^\circ$の直角三角形であるから，$\mathrm{NM}=\mathrm{AM}\cos\theta=\sqrt{6}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\mathrm{CN}=\mathrm{CM}-\mathrm{NM}=\sqrt{6}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$より，$\dfrac{\mathrm{CN}}{\mathrm{NM}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\underline{2}$